1. *Sia* $p: \mathbf{R} \to S^1$ *l'applicazione data da* $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. *Verificare che* $p: \mathbf{R} \to S^1$ *definisce un rivestimento: descrivere esplicitamente un ricoprimento "trivializzante"* $\{U_\alpha\}_\alpha$ *di* S^1 *e la controimmagine* $p^{-1}(U_\alpha)$*, al variare di* α.

Sol.: Un ricoprimento "trivializzante" di S^1 è ad esempio $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$, con

$$U_0 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s),\ -3/8 < s < 3/8\}, \quad U_1 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s),\ 1/8 < s < 7/8\}$$

(il nome "trivializzante" viene dal fatto che per ogni $U \in \mathcal{U}$ vale $p^{-1}(U) = U \times F$, dove F è la fibra di un elemento qualunque di U).
Abbiamo

$$p^{-1}(U_0) = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \{-3/8 + m < t < 3/8 + m\}, \qquad p^{-1}(U_1) = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \{1/8 + m < t < 7/8 + m\}$$

(unione disgiunta), e la restrizione di p ad ognuno degli aperti di $p^{-1}(U_0)$ e di $p^{-1}(U_1)$ è un omeomorfismo su U_0 e U_1 rispettivamente. Ad esempio, scrivendo $t = s + m$, con $-3/8 < s < 3/8$, abbiamo

$$p(t) = (\cos 2\pi(s + m), \sin 2\pi(s + m)) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad -3/8 < s < 3/8.$$

2. *Sia* $p: (0, 5) \to S^1$ *l'applicazione data da* $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. *Verificare che* $p: (0, 5) \to S^1$ *non definisce un rivestimento.*

Sol.: Come ricoprimento di S^1 prendiamo di nuovo $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$, con

$$U_0 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s),\ -3/8 < s < 3/8\}, \quad U_1 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s),\ 1/8 < s < 7/8\}.$$

Abbiamo

$$p^{-1}(U_0) = \{0 < t < 3/8\} \cup \bigcup_{1 \le m \le 9} \{-3/8 + m < t < 3/8 + m\} \cup \{-3/8 + 10 < t < 10\},$$

(unione disgiunta), da cui si vede che la proiezione p ristretta a $\{0 < t < 3/8\}$ NON è un omeomorfismo su U_0 (non basta che $\{0 < t < 3/8\}$ e U_0 siano omeomorfi. L'omeomorfismo deve essere dato da p).

3. *Sia* $S^1 = \{z = e^{2\pi i s},\ s \in [0, 1]\}$. *Sia* $p: S^1 \to S^1$ *l'applicazione data da* $z \mapsto z^3$. *Verificare che* $p: S^1 \to S^1$ *definisce un rivestimento: descrivere esplicitamente un ricoprimento "trivializzante"* $\{U_\alpha\}_\alpha$ *di* S^1 *e la controimmagine* $p^{-1}(U_\alpha)$*, al variare di* α.

Sol.: Come ricoprimento di S^1 prendiamo di nuovo $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$, con

$$U_0 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s),\ -3/8 < s < 3/8\}, \quad U_1 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s),\ 1/8 < s < 7/8\}.$$

Abbiamo

$$p^{-1}(U_0) = \bigcup_{m=0,1,2} \{-1/8 + m/3 < t < 1/8 + m/3\}, \qquad p^{-1}(U_1) = \bigcup_{m=0,1,2} \{1/24 + m/3 < t < 7/24 + m/3\}.$$

(unione disgiunta), e la restrizione di p ad ognuno degli aperti di $p^{-1}(U_0)$ e di $p^{-1}(U_1)$ è un omeomorfismo su U_0 e U_1 rispettivamente. Ad esempio, scrivendo $t = s+m/3$, con $-1/8 < s < 1/8$, abbiamo

$$p(t) = (\cos 2\pi\, 3(s+m/3), \sin 2\pi\, 3(s+m/3)) = (\cos 2\pi\, 3s, \sin 2\pi\, 3s), \quad -1/8 < s < 1/8.$$

4. *Sia $p\colon S^n \to \mathbf{R}P^n$ la proiezione al quoziente rispetto alla relazione di equivalenza su S^n data da $X \sim Y$ se $X = \pm Y$. Verificare che p definisce un rivestimento.*

Sol.: Pensiamo S^n in $\mathbf{R}^{n+1}$. Sia $a \in S^n$ e sia $B(a, 1/2) = \{X \in \mathbf{R}^{n+1} \ : \ \|X-a\| < 1/2\}$, la palletta di centro a e raggio $1/2$ in $\mathbf{R}^{n+1}$. L'aperto $U_a := S^n \cap B(a, 1/2)$ non contiene l'antipodale di alcun suo punto. Ne segue che p identifica U_a con la sua immagine in $\mathbf{R}P^n$ e $p^{-1}(p(U_a)) = U_a \cup U_{-a}$ (unione disgiunta). Il ricoprimento $\mathcal{U} = \{p(U_a)\}_{a \in S^n}$ è un ricoprimento trivializzante di $\mathbf{R}P^n$ e $p\colon S^n \to \mathbf{R}P^n$ è un rivestimento.

5. *Siano $p\colon \widetilde{X} \to X$ e $q\colon \widetilde{Y} \to Y$ rivestimenti. Verificare che $p \times q\colon \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ definisce un rivestimento. Determinare almeno tre rivestimenti distinti del toro $T = S^1 \times S^1$.*

Sol.: L'applicazione $p \times q\colon \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ è continua e suriettiva se lo sono p e q. Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ e $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_\beta$ sono ricoprimenti trivializzanti di X e Y, allora $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U_\alpha \times V_\beta\}_{\alpha,\beta}$ è un ricoprimento trivializzante di $X \times Y$.
Sia $T = \{((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)), \quad s, t \in [0,1] \times [0,1]\}$.

$$p_1\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to T, \quad (s,t) \mapsto ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)),$$

$$p_2\colon \mathbf{R} \times S^1 \to T, \quad (s, (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)) \mapsto ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)),$$

$$p_3\colon S^1 \times S^1 \to T, \quad ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)) \mapsto ((\cos 10\pi s, \sin 10\pi s), (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t))$$

sono tre rivestimenti distinti (non omeomorfi) del toro $T = S^1 \times S^1$.

6. *Sia $p\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ l'applicazione data da $z \mapsto z^n$. Verificare che $p\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$ definisce un rivestimento: descrivere esplicitamente un ricoprimento "trivializzante" $\{U_\alpha\}_\alpha$ di $\mathbf{C}^*$ e la controimmagine $p^{-1}(U_\alpha)$, al variare di α.*

Sol.: In coordinate reali, la mappa $z \mapsto z^n$ diventa

$$\rho(\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \rho^n(\cos n\theta, \sin n\theta).$$

Si verifica facilmente che è un omeomorfismo locale (ha jacobiano non nullo). Sia $a = |a|(\cos\theta_0, \sin\theta_0) \in \mathbf{C}^*$. La controimmagine $p^{-1}(a)$ è data dagli n numeri complessi

$$|a|^{1/n}(\cos\theta_k, \sin\theta_k), \qquad \theta_k = \frac{\theta_0}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Sia U l'intorno aperto di a dato da

$$U = \{\rho(\cos\theta, \sin\theta) \mid \begin{cases} |a| - \epsilon < \rho < |a| + \epsilon \\ \theta_0 - \pi/n < \theta < \theta_0 + \pi/n \end{cases}\}, \qquad 0 < \epsilon < |a|/2.$$

Al variare di $a \in \mathbf{C}^*$ gli aperti U formano un ricoprimento trivializzante di $\mathbf{C}^*$. Infatti la controimmagine $p^{-1}(U)$ è data dall'unione disgiunta degli n aperti

$$U_k = \{\rho(\cos\theta, \sin\theta) \mid \begin{cases} (|a| - \epsilon)^{1/n} < \rho < (|a| + \epsilon)^{1/n} \\ \theta_k - \pi/n^2 < \theta < \theta_k + \pi/n^2 \end{cases}\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Si verifica facilmente che $p|U_k\colon U_k \to U$ è un omeomorfismo.

7. *Sia $p\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ l'applicazione data da $z \mapsto e^z$. Verificare che $p\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ definisce un rivestimento: descrivere esplicitamente un ricoprimento "trivializzante" $\{U_\alpha\}_\alpha$ di $\mathbf{C}^*$ e la controimmagine $p^{-1}(U_\alpha)$, al variare di α.*

Sol.: In coordinate polari, la mappa $z \mapsto e^z$ diventa

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) \mapsto e^{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}.$$

Sia $a = |a|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) \in \mathbf{C}$. Allora $e^z = a$ se e solo se

$$z = \log a = \log|a| + i(\theta_0 + 2\pi k), \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Sia U l'intorno aperto di a dato da

$$U = \{\rho(\cos\theta, \sin\theta) \mid \begin{cases} 0 < \rho \leq \infty \\ \theta_0 - \frac{\pi}{4} < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{4} \end{cases}\}.$$

Al variare di $a \in \mathbf{C}^*$ gli aperti U formano un ricoprimento trivializzante di $\mathbf{C}^*$. Infatti la controimmagine $p^{-1}(U)$ è data dall'unione disgiunta degli aperti, parametrizzati dagli interi,

$$U_k = \{\rho(\cos\theta, \sin\theta) \mid \begin{cases} 0 < \rho \leq \infty \\ \theta_0 - \frac{\pi}{4} + 2\pi k < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}\}, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Si verifica facilmente che $p|U_k\colon U_k \to U$ è un omeomorfismo.