

1. Hatcher, *Algebraic Topology: Esercizi 14, 18(a), pag. 39.*

Hatcher, Esercizio 14, pag.39. Siano $p: X \times Y \rightarrow X$ e $q: X \times Y \rightarrow Y$ le proiezioni di $X \times Y$ sui fattori. I lacci $\gamma: I \rightarrow (X \times Y, (x_0, y_0))$ sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di lacci $\gamma_1 = p \circ \gamma: I \rightarrow X$ e $\gamma_2 = q \circ \gamma: I \rightarrow Y$. Il fatto che dati lacci γ ed η in $(X \times Y, (x_0, y_0))$, vale

$$[\gamma] = [\eta] \Leftrightarrow \begin{cases} [\gamma_1] = [\eta_1] \\ [\gamma_2] = [\eta_2] \end{cases}$$

implica che la mappa $\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$ data da

$$[\gamma] \mapsto ([\gamma_1], [\gamma_2]) = ([p \circ \gamma], [q \circ \gamma]) = (p_*[\gamma], q_*[\gamma])$$

è un isomorfismo di gruppi.

Hatcher, Esercizio 18(a), pag.39. Consideriamo la decomposizione cellulare di $S^1 \vee S^2$ data da:

una 0-cella x_0 ;

una 1-cella, con mappa di attaccamento $\phi: \{\pm 1\} \rightarrow x_0$ data da $\phi(\pm 1) \equiv x_0$;

una 2-cella, con mappa di attaccamento $\psi: \{S^1\} \rightarrow X^{(1)}$ data da $\psi(S^1) \equiv x_0$.

Quando si parte da una sola 0-cella, il gruppo fondamentale dello spazio ottenuto è un gruppo libero con tanti generatori quante sono le 1-celle attaccate e tante relazioni quante sono le due celle. Nel nostro caso la relazione è banale. Ne segue che $\Pi_1(S^1 \vee S^2) \cong \mathbf{Z}$.

2. Hatcher, *Algebraic Topology: Esercizi 2, 3, 4, 7, pag. 52-53.*

Hatcher, Esercizio 2, pag.52. Osserviamo innanzitutto che X è connesso per archi: siano $x \in X_i$ e $y \in X_j$. Per ipotesi l'intersezione $X_i \cap X_j$ è non vuota, per cui è possibile collegare x e y con una curva continua (anche una poligonale).

Sia $k = 1$ ed $X = X_1$ convesso. In particolare X è contrattile e quindi semplicemente connesso.

Sia $k = 2$ ed $X = X_1 \cup X_2$ unione di convessi. Poiché l'intersezione $X_1 \cap X_2$ è convessa, ed in particolare connessa per archi, possiamo applicare il teorema di Van Kampen ed avere una mappa suriettiva

$$\Pi_1(X_1, x_0) * \Pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0), \quad x_0 \in X_1 \cap X_2.$$

Poiché $\Pi_1(X_1, x_0) = \Pi_1(X_2, x_0) = 1$, anche $\Pi_1(X, x_0) = 1$. Nel nostro caso tutti i gruppi $\Pi_1(X, x)$ sono isomorfi, e dunque X è semplicemente connesso.

Adesso procediamo per induzione. Supponiamo di aver già dimostrato che $Y = X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}$ è semplicemente connesso. Dobbiamo dimostrare che anche $Y \cup X_k$ lo è. Per poter applicare il teorema di Van Kampen alla coppia Y e X_k bisogna che $Y \cap X_k$ sia connesso per archi. Scriviamo

$$Y \cap X_k = (X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}) \cap X_k = \bigcup_i X_i \cap X_k.$$

Poiché per ipotesi $X_i \cap X_j \cap X_h \neq \emptyset$ per ogni i, j, h , gli aperti $X_i \cap X_k$ hanno a due a due intersezione non vuota. Ne segue che l'intersezione $Y \cap X_k$ risulta connessa per archi, come desiderato. Adesso la dimostrazione si conclude come nel caso $k = 2$.

Osserviamo che senza l'ipotesi $X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$ per ogni i, j, k , possiamo costruire in \mathbf{R}^2 un'unione di convessi che è connessa ma non semplicemente connessa.

Hatcher, Esercizio 3, pag.52. Osserviamo innanzitutto che il risultato non dipende dalla posizione dei punti, ma solo dal loro numero. Dopodiché procediamo per induzione.

Se $k = 1$, poniamo $p_1 = (0, \dots, 0)$ uguale all'origine. Allora $\mathbf{R}^n \setminus \{p_1\}$ ammette una retrazione forte sulla sfera S^{n-1} :

$$\mathbf{R}^n \setminus \{p_1\} \rightarrow S^{n-1}, \quad X \mapsto (1-t)X + t \frac{X}{\|X\|}, \quad t \in [0, 1].$$

Per $n \geq 3$, la sfera S^{n-1} è semplicemente connessa, e lo stesso vale per $\mathbf{R}^n \setminus \{p_1\}$.

Se $k = 2$, poniamo ad esempio $p_1 = (0, \dots, 1)$ e $p_2 = (0, \dots, -1)$. Consideriamo il ricoprimento di $\mathbf{R}^n \setminus \{p_1, p_2\}$ dato dagli aperti $A = \{X \in \mathbf{R}^n, x_n > -1/2\}$ e $B = \{X \in \mathbf{R}^n, x_n < 1/2\}$. Abbiamo che A e B sono rispettivamente omeomorfi ad $\mathbf{R}^n \setminus \{p_1\}$ ed $\mathbf{R}^n \setminus \{p_2\}$, ed in particolare sono semplicemente connessi. Inoltre $A \cap B \cong \mathbf{R}^{n-1} \times I$ è contrattile, ed in particolare è connesso per archi. Dal teorema di Van Kampen segue allora che $\mathbf{R}^n \setminus \{p_1, p_2\}$ è semplicemente connesso.

Adesso procediamo per induzione. Supponiamo di aver già dimostrato che $Y = \mathbf{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_{k-1}\}$ è semplicemente connesso. Dobbiamo dimostrare che anche $\mathbf{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ lo è. Supponiamo per semplicità che tutti i punti $\{p_1, \dots, p_{k-1}\}$ abbiano l' n -sima coordinata minore di -1 e che p_k abbia l' n -sima coordinata maggiore di 1 . Adesso la dimostrazione si conclude come nel caso $k = 2$.

Osservazione. Osserviamo che se $n = 2$, lo spazio $\mathbf{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ è connesso per archi ma non semplicemente connesso: infatti $\Pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}) \cong \mathbf{Z} * \dots * \mathbf{Z}$, dove $\mathbf{Z} * \dots * \mathbf{Z}$ è prodotto libero di k copie di \mathbf{Z} , generato dai k lacci che si avvolgono una volta attorno ad ognuno dei punti p_i .

Hatcher, Esercizio 4, pag.53. Lo spazio $\mathbf{R}^3 \setminus \{l_1, \dots, l_n\}$ ammette un retratto di deformazione forte su $S^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$, dove x_1, x_2, \dots, x_{2n} sono i $2n$ punti di intersezione delle n rette per l'origine l_1, \dots, l_n con S^2 . Di conseguenza

$$\Pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus \{l_1, \dots, l_n\}) \cong \Pi_1(S^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}).$$

Ricordiamo che lo spazio $S^2 \setminus \{p\}$ è omeomorfo ad \mathbf{R}^2 tramite la proiezione stereografica, da cui segue che

$$\Pi_1(S^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}) \cong \Pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}\}) \cong \underbrace{\mathbf{Z} * \dots * \mathbf{Z}}_{2n-1 \text{ volte}}$$

(vedi osservazione in coda all'esercizio precedente).

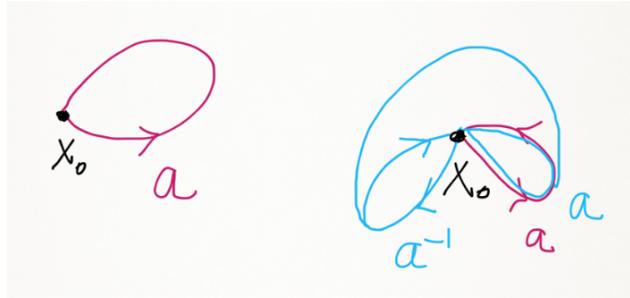
Hatcher, Esercizio 7, pag.53. Probabilmente la più semplice decomposizione cellulare dello spazio X ottenuto da S^2 identificando polo nord e polo sud è la seguente:

una 0-cella x_0

una 1-cella, con mappa di "attaccamento" $\phi: \{\pm 1\} \rightarrow x_0$ data da $\phi(\pm 1) = x_0$;

una 2-cella, con mappa di "attaccamento" $\psi: \{S^1\} \rightarrow X^{(1)}$ data da $\psi(S^1) = aa^{-1}$.

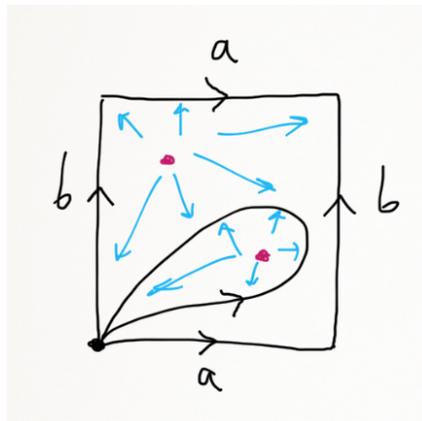
Ne segue che $\Pi_1(X) = \mathbf{Z}/aa^{-1} \cong \mathbf{Z}$.



3. Calcolare il gruppo fondamentale delle superfici $S_1 = T \setminus \{p\}$ ed $S_2 = T \setminus \{p_1, p_2\}$, dove T è il toro e p_1, p_2 sono punti di T .

Sol. Identifichiamo T con la superficie ottenuta da un quadrato Q identificando i lati opposti con verso concorde. Allora il perimetro di Q , omeomorfo a $S^1 \vee S^1$, è un retratto di deformazione di $S_1 = T \setminus \{p\}$. Ne segue che $\Pi_1(S_1) \cong \Pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

Per calcolare il gruppo fondamentale di S_2 osserviamo che S_2 è omotopicamente equivalente al bouquet di tre cerchi $S^1 \vee S^1 \vee S^1$. Ne segue che $\Pi_1(S_2) \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.



4. Calcolare il gruppo fondamentale dello spazio $X = \mathbf{R}^n \setminus \{H_{n-2}\}$, dove H_{n-2} è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^n di codimensione 2.

Sol. Per semplicità prendiamo

$$H_{n-2} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1 = x_2 = 0\}.$$

Poiché l'origine appartiene ad H_{n-2} , lo spazio $X = \mathbf{R}^n \setminus \{H_{n-2}\}$ ammette una retrazione forte su $S^{n-1} \setminus \{S^{n-1} \cap H_{n-2}\}$, dove

$$S^{n-1} \cap H_{n-2} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases}\} \cong S^{n-3}.$$

Poiché $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-3} \subset S^{n-1}$, la proiezione stereografica definisce omeomorfismi

$$p: S^{n-1} \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1} \cong \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, 0)\}$$

e, per restrizione,

$$p: S^{n-1} \setminus \{S^{n-1} \cap H_{n-2}\} \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{H_{(n-1)-2}\},$$

dove $H_{(n-1)-2} = \{(0, 0, x_3, \dots, x_{n-1}, 0)\}$ è il sottospazio di \mathbf{R}^{n-1} immagine tramite la proiezione stereografica di $S^{n-3} \cong \{S^{n-1} \cap H_{n-2}\}$. Notare che $H_{(n-1)-2}$ è a sua volta un sottospazio di codimensione 2 in \mathbf{R}^{n-1} . Da queste considerazioni segue che

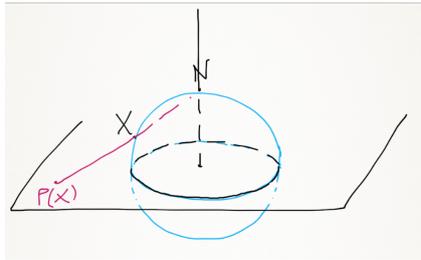
$$\Pi_1(\mathbf{R}^n \setminus \{H_{n-2}\}) \cong \Pi_1(S^{n-1} \setminus \{S^{n-1} \cap H_{n-2}\}) \cong \Pi_1(\mathbf{R}^{n-1} \setminus \{H_{(n-1)-2}\}),$$

cioè abbiamo ricondotto il calcolo del gruppo fondamentale dello spazio iniziale a quello di uno spazio “simile” ma con una dimensione in meno.

Ripetendo il ragionamento, arriviamo a

$$\Pi_1(\mathbf{R}^n \setminus \{H_{n-2}\}) \cong \dots \cong \Pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus \{retta\}) \cong \Pi_1(S^2 \setminus \{p_1, p_2\}) \cong \Pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{p\}) \cong \mathbf{Z}.$$

Nota. Sia $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ la sfera di centro l'origine e raggio 1 in \mathbf{R}^{n+1} . Sia $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ il “polo Nord”. La proiezione stereografica associa ad un punto $X = (x_1, \dots, x_{n+1})$ della sfera $S^n \setminus \{N\}$ l'intersezione della retta per N ed X con il piano $x_{n+1} = 0$.



In coordinate, è data da

$$p: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, 0 \right) \sim \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

ed è un omeomorfismo.