1. *Determinare quali dei seguenti lacci in* S^1*, basati in* $x_0 = (1,0)$*, appartengono alla stessa classe in* $\Pi_1(S^1, x_0)$*:*

$$\gamma_1(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad \gamma_2(s) = (\cos 2\pi s, -\sin 2\pi s), \quad \gamma_3(s) = (\cos 8\pi s, \sin 8\pi s), \qquad s \in [0,1].$$

Determinare sollevamenti $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3 \colon I \to \mathbf{R}$ *di* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$*, di punto iniziale* $\tilde{\gamma}_1(0) = 0$*,* $\tilde{\gamma}_2(0) = 5$*,* $\tilde{\gamma}_3(0) = -2$*.*

Sol. Due lacci in S^1, con lo stesso punto base, sono omotopi se e solo se si avvolgono su S^1 lo stesso numero di volte e nello stesso verso. Il laccio γ_1 si avvolge su S^1 una volta in senso orario, γ_2 una volta in senso antiorario e γ_3 quattro volte in senso orario. Dunque appartengono a tre diverse classi in $\Pi_1(S^1, x_0)$.

Sia $p \colon \mathbf{R} \to S^1$ l'applicazione definita da $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Ogni laccio in S^1, di punto base x_0, si solleva ad un cammino $\tilde{\gamma} \colon I \to \mathbf{R}$, per cui vale $p\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s)$, per ogni $s \in I$. Tale sollevamento è unico una volta fissato il suo punto di partenza $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Nel nostro caso abbiamo:

$$\tilde{\gamma}_1(s) = s, \qquad \tilde{\gamma}_2(s) = 5 - s, \qquad \tilde{\gamma}_3(s) = -2 + 4s, \qquad s \in I.$$

Infatti

$$\tilde{\gamma}_1(0) = 0, \qquad p\tilde{\gamma}_1(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) = \gamma_1(s);$$

$$\tilde{\gamma}_2(0) = 5, \qquad p\tilde{\gamma}_2(s) = (\cos 2\pi(5-s), \sin 2\pi(5-s)) = (\cos 2\pi s, -\sin 2\pi s) = \gamma_2(s);$$

$$\tilde{\gamma}_3(0) = -2, \qquad p\tilde{\gamma}_3(s) = (\cos 2\pi(-2+4s), \sin 2\pi(-2+4s)) = (\cos 8\pi s, \sin 8\pi s) = \gamma_3(s).$$

2. *Determinare se i seguenti lacci in* S^2 *sono omotopi*

$$\gamma_1(s) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\pi s, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\pi s, \cos 2\pi s), \quad \gamma_1(s) = (\frac{1}{2}\sin 4\pi s, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4\pi s, \cos 4\pi s), \qquad s \in [0,1].$$

Sol. I lacci γ_1 e γ_2 sono due meridiani della sfera unitaria S^2, passanti per il polo nord $N = (0,0,1)$ e il polo sud $S = (0,0,-1)$. Poiché la sfera è semplicemente connessa γ_1 e γ_2 sono omotopi (vedi anche Hatcher, Esercizio 5, pag.38).

3. *Hatcher, Algebraic Topology: Esercizi 5, 8, 16, pag.38-39.*

Hatcher, Esercizio 5, pag.38. Mostriamo che (c)$\Rightarrow$ (a)$\Rightarrow$ (b)$\Rightarrow$(c).

(c)$\Rightarrow$ (a)

Sia $f \colon S^1 \to X$ una applicazione e sia $\gamma \colon I \to S^1$ data da $\gamma(s) = e^{2\pi i s}$. La composizione $f \circ \gamma \colon I \to X$ è un laccio in X di punto base $x_0 = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(1) \in X$. L'omotopia fra il laccio $f \circ \gamma$ ed il laccio costante $\sigma(s) \equiv x_0$

$$F \colon I \times I \to X, \qquad F(s,0) = f \circ \gamma(s) = f(e^{2\pi i s}), \quad F(s,1) = \sigma(s) \equiv x_0$$

è anche un'omotopia fra f e l'applicazione identicamente uguale a x_0.

(a)$\Rightarrow$(b).

Sia $f: S^1 \to X$ un'applicazione. Per ipotesi esiste un'omotopia fra f e un'applicazione costante

$$F: S^1 \times I \to X, \qquad F(z,0) = f(z), \quad F(z,1) \equiv x_0 \in X, \qquad \forall z \in S^1.$$

Questo significa che F definisce un'applicazione

$$\overline{F}: S^1 \times I/\sim \to X,$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza su $S^1 \times I$ data da $(z,1) = (w,1)$, per ogni $z, w \in S^1$. Poiché lo spazio quoziente $S^1 \times I/\sim$ è omeomorfo a D^2, l'applicazione $\overline{F}$ è l'estensione cercata.

(b)$\Rightarrow$(c).
Sia $f: S^1 \to X$ una applicazione e sia $\tilde{f}: D^2 \to X$ una sua estensione. Scriviamo $\tilde{f} = \tilde{f}(\rho e^{2\pi i s})$, con $(\rho, s) \in [0,1] \times [0,1]$. Per $\rho = 1$ abbiamo $\tilde{f}(e^{2\pi i s}) = f(e^{2\pi i s})$ e per $\rho = 0$ abbiamo $\tilde{f}(0 \cdot e^{2\pi i s}) \equiv \tilde{f}(0)$, per ogni s. Dunque, per la continuità di $\tilde{f}$ in ρ, l'estensione $\tilde{f}$ definisce un'omotopia fra f e l'applicazione identicamente uguale a $\tilde{f}(0)$.

Hatcher, Esercizio 8, pag.38.
Pensiamo il toro $T = S^1 \times S^1$ come la superficie di $\mathbf{R}^3$ ottenuta ruotando una circonferenza attorno all'asse z: ad esempio la circonferenza $\begin{cases} x = 0 \\ (y-2)^2 + z^2 = 1. \end{cases}$ Consideriamo l'applicazione $f: T \to \mathbf{R}^2$ data da $f(x,y,z) = (x,y)$, cioè la proiezione sul piano x, y. È evidente che $f(-x,-y,-z) = (-x,-y) \neq (x,y) = f(x,y,z)$, per ogni $(x,y,z) \in T$ (notare che f non assume mai il valore zero). Quindi per T non vale un teorema di tipo Borsuk-Ulam.

Hatcher, Esercizio 16, pag.39. Sia $A \subset X$ un sottospazio di uno spazio di uno spazio topologico X e sia $r: X \to A$ una retrazione. Sia $a \in A$ e siano $i_*: \Pi_1(A,a) \to \Pi_1(X,a)$ e $r_*: \Pi_1(X,a) \to \Pi_1(A,a)$ gli omomorfismi indotti dall'inclusione $A \hookrightarrow X$ e da r fra i gruppi fondamentali. Allora $r_* \circ i_* = Id_{\Pi_1(X,a)}$, e ciò implica i_* iniettivo ed r^* suriettivo.
(a) Non esiste $r: \mathbf{R}^3 \to S^1$, perchè

$$\Pi_1(\mathbf{R}^3) = \{1\} \qquad \Pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$$

e non esistono omomorfismi iniettivi $i_*: \mathbf{Z} \to \{1\}$.
(b) Non esiste $r: S^1 \times D^2 \to \partial(S^1 \times D^2) \cong S^1 \times S^1$, perché

$$\Pi_1(S^1 \times D^2) \cong \Pi_1(S^1) \times \Pi_1(D^2) \cong \mathbf{Z}, \qquad \Pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$$

e non esistono omomorfismi suriettivi $i_*: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
(c) Non esiste $r: S^1 \times D^2 \to A$, perché

$$\Pi_1(S^1 \times D^2) \cong \mathbf{Z}, \qquad \Pi_1(A) \cong \mathbf{Z},$$

ed A è omotopicamente nullo in $S^1 \times D^2$. Dunque l'omomorfismo indotto $i_*: \Pi_1(A) \to \Pi_1(S^1 \times D^2)$ non può essere iniettivo.
(d) Non esiste $r: D^2 \vee D^2 \to \partial(D^2 \vee D^2) = S^1 \vee S^1$, perché

$$\Pi_1(D^2 \vee D^2) = \{1\}, \qquad \Pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$$

e non esistono omomorfismi suriettivi $r_*: \{1\} \to \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

(e) Non esiste $r: X \to \partial(D^2 \vee D^2) = S^1 \vee S^1$, perché

$$\Pi_1(X) \cong \mathbf{Z}, \qquad \Pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$$

e non esistono omomorfismi suriettivi $r_*: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

(f) Sia C il cerchio al centro del nastro di Moebius M e sia $A = \partial M$ il cerchio al suo bordo. Abbiamo che $\Pi_1(A) \cong \mathbf{Z}$, con generatore $[\alpha]$, un laccio che percorre A una volta. Sia γ un laccio che percorre C una volta. Poiché C è un retratto di deformazione forte di M, abbiamo che $[\gamma]$ è un generatore di $\Pi_1(M) \cong \Pi_1(C) \cong \mathbf{Z}$. Osserviamo anche che sotto questa deformazione l'immagine di $[\alpha]$ in $\Pi_1(M)$ è data da $[\gamma]^2$, in quanto la proiezione di α su C percorre C due volte. Supponiamo per assurdo che esista una retrazione $r: M \to A$. Poiché $r \circ i|A = Id_A$, si ha che $r_* \circ i_*[\alpha] = [\alpha]$ in $\Pi_1(A)$. D'altra parte, $i_*([\alpha]) = [\gamma]^2 \in \Pi_1(M)$, da cui

$$[\alpha] = r_*(i_*([\alpha])) = r_*([\gamma]^2) = [r_*(\gamma)]^2.$$

Il fatto che $[\alpha]$ risulti un quadrato in $\Pi_1(A)$ contraddice l'ipotesi che α percorra A una sola volta: infatti se esistesse una retrazione $r: M \to A$, gli elementi della classe $r_*[\gamma]$, immagine di $[\gamma]$ tramite $r_*: \Pi_1(M) \to \Pi_1(A)$, sarebbero lacci su A, cioè curve chiuse che si avvolgono almeno una volta su A, e quelli della classe $[r_*(\gamma)]^2$ curve chiuse che si avvolgono almeno due volte su A.