1. *Sia* $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ *l'insieme dei numeri naturali. Siano dati gli insiemi di stringhe*

$$A=\{abcdef\in\mathbf{N}^6\mid 0\le a,b,c,d,e,f\le 5\},\quad B=\{abcdef\in\mathbf{N}^6\mid 0\le a,b,c\le 5,\ 5\le d,e,f\le 9\}$$

$$C=\{abcdef\in\mathbf{N}^6\mid 0\le a,b,c,d,e,f\le 9\},\quad D=\{abcdef\in\mathbf{N}^6\mid 3\le a,b,c,d,e,f\le 9\}.$$

Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi, spiegando il metodo usato:

$$A,\quad B,\quad C,\quad D,\quad A\cup D,\quad A\cap D,\quad B\cup D,\quad C-A,\quad \mathcal{C}_C D,\quad A\times B.$$

$$|A|=6^6,\quad |B|=6^3\cdot 5^3,\quad |C|=10^6,\quad |D|=7^6;$$

$A\cap D=\{abcdef\in\mathbf{N}^6\mid 3\le a,b,c,d,e,f\le 5\}$, $|A\cap D|=3^6$, $|A\cup D|=|A|+|D|-|A\cap D|=6^6+7^6-3^6$.
$A\subset C$, $C-A=\mathcal{C}_C A=\{abcdef\in\mathbf{N}^6\mid 6\le a,b,c,d,e,f\le 9\}$, $|C-A|=4^6$
$C\subset D$, $\mathcal{C}_C D=\{abcdef\in\mathbf{N}^6\mid 0\le a,b,c,d,e,f\le 2\}$, $|\mathcal{C}_C D|=3^6$. $|A\times B|=|A||B|=6^6\cdot 6^3 5^3$.

2. *Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi, spiegando il metodo usato:*
   (a) *Stringhe di zeri e uni di lunghezza 8.*
   (b) *Stringhe di zeri e uni di lunghezza minore o uguale a 8.*
   (c) *Stringhe di zeri e uni di lunghezza 8 che iniziano con 3 zeri e terminano con un uno.*
   (d) *Stringhe di zeri e uni di lunghezza 8 che iniziano con 3 zeri o terminano con due uni.*
   (e) *Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 3 che non contengono 3 volte la stessa cifra.*
   (f) *Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 3 che iniziano con un numero pari.*
   (g) *Stringhe di cifre da zero a nove di lunghezza 3 che contengono 2 volte la cifra 4.*

(a) $XYZUVWST$, $X,\ldots,T\in\{0,1\}$: 2^8
(b) $2+2^2+\ldots+2^8$
(c) $000XYZU1$ $X,Y,Z,U\in\{0,1\}$: 2^4
(d) $A:$ $000XYZUV$, $X,\ldots,V\in\{0,1\}$: 2^5, $B:$ $XYZUVW11$, 2^6,
$A\cap B:$ $000XYZ11$, 2^3,
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=2^5+2^6-2^3$.
(e) tutte le stringhe XYZ, $X,Y,Z\in\{0,\ldots,9\}$: 10^3
quelle con 3 cifre uguali XXX, $X\in\{0,\ldots,9\}$: 10
quelle cercate: 10^3-10.
(f) XYZ, con $X\in\{0,2,4,6,8\}$, $Y,Z\in\{0,\ldots,9\}$: $5\cdot 10\cdot 10$.
(g) $44X$, $X44$, $4X4$, con $X\in\{0,\ldots,9\}$: $3\cdot 10$.

3. *Una scatola contiene 10 palle rosse e 10 palle blu.*
   (a) *Quante palle dobbiamo estrarre (a caso) per essere sicuri di ottenere almeno tre palle dello stesso colore?*
   (b) *Quante palle dobbiamo estrarre (a caso) per essere sicuri di ottenere almeno tre palle blu?*

(a): 5. Per male che vada le prime 4 sono due rosse e due blu. La quinta garantisce tre palle dello stesso colore.
(b): 13. Per male che vada le prime 10 sono tutte rosse. Finite quelle rosse le tre successive saranno per forza blu.

4. *Sia* d *un intero positivo.*
   (a) *Far vedere che in ogni insieme di* $d+1$ *numeri naturali non necessariamente consecutivi almeno due danno lo stesso resto se divisi per* d.
   (b) *Far vedere che in ogni insieme di* $d+1$ *numeri naturali consecutivi esattamente uno è divisibile per* d.

(a) Ci sono d possibili resti: $0,1,\ldots,d-1$. Per male che vada, i primi d numeri divisi per d danno tutti resto diverso $0,1,\ldots,d-1$. Ma il $(d+1)$-esimo resto deve per forza coincidere con uno dei resti precedenti.

(b) siano $\quad a,\ a+1,\ a+2,\dots,a+d \quad$ i d numeri consecutivi. Sia r, con $0 \le r < d$ il resto di a diviso d. Allora gli altri resti sono rispettivamente $r+1,\ r+2,\dots,r+d$. Almeno uno di questi resti e' uguale a d, e il numero corrispondente è divisibile per d. Non più di uno perché $0 \le r < d$.

5. *Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di n elementi. Sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A*

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\emptyset\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_1, a_2, a_3\}, \dots, A\}.$$

   Verificare che $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità 2^n.

I sottoinsiemi di A di cardinalità k sono $\binom{n}{k}$. La cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è dunque $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

6. Determinare il coefficiente di x^5y^{11} nello sviluppo di $(x+y)^{16}$.

$\binom{16}{5} = \frac{16!}{5!11!} = 4368$.

7. *Quante stringhe di 7 caratteri si possono formare con le lettere della parola SEERESS?*

Le permutazioni delle 7 lettere della parola SEERESS sono 7!. Però dobbiamo identificare fra loro le stringhe ottenute permutando fra loro le tre E o le tre S. In totale abbiamo $\frac{7!}{3!3!}$ stringhe distinte.

8. Esercizi M.A.A.:
   - Sez. 1.3: 1,2,3,4,6,11,12,18-24, 26,27, 38, 40,41,42,43.
   - Sez 1.5: 1-10.
   - Sez 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.6: a piacere.