1. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare e disegnare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

(ii) Cosa fa geometricamente F?

(iii) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$.

Sol. (i) Poiché per definizione $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, si ha
$F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(ii) Geometricamente F è la riflessione rispetto all'asse x_2.
(iii) Per linearità, $F(span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}) = span\{F(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix})\} = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$. In altre parole, la retta per l'origine generata dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ viene mandata da F nella retta per l'origine generata dal vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare e disegnare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

(ii) Cosa fa geometricamente F?

(iii) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

(iv) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

(v) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

(vi) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

Sol. (i) Dalla definizione

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui
$F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Geometricamente F proietta un vettore sula piano $x_3 = 0$ e poi lo riflette rispetto all'asse x_2.

(iii) $F(U) = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$; $\dim U = \dim F(U) = 1$.

(iv) $F(U) = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\}$; $\dim U = \dim F(U) = 1$.

(v) $F(U) = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$; $\dim U = 2$, $\dim F(U) = 1$.

(vi) $F(U) = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$; $\dim U = 2$, $\dim F(U) = 1$.

3. Quali applicazioni A sono mappe lineari?
   (i) $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $A(x) = |x|$;
   (ii) $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix};$$

   (iii) $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + 2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix};$$

   (iv) $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \end{pmatrix};$$

   (v) $A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4^2 \end{pmatrix}.$$

Sol. (i) No. Ad esempio $A(-1) = |-1| = 1$; $A(1) = |1| = 1$ e dunque prendendo $\lambda = -1$ e $x = 1$ si ha $A(\lambda x) \neq \lambda A(x)$.

(ii) Si. Segue dal fatto che tutte le righe del vettore colonna $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$ sono lineari nelle coordinate $x_1, \ldots, x_n$.

(iii) No. La prima riga del vettore $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + 2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$ non è lineare nelle coordinate, contenendo un termine noto. In particolare $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Si. Segue dal fatto che tutte le righe del vettore colonna $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$ sono lineari nelle coordinate $x_1, \ldots, x_n$.

(v) No. La seconda riga del vettore $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4^2 \end{pmatrix}$ non è lineare nelle coordinate, contenendo un termine di seondo grado. In particolare si ha

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Sia M una matrice $m \times n$. Indichiamo con $F_M \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ l'applicazione data dalla moltiplicazione matrice-vettore $F_M(X) = MX$, con $X \in \mathbf{R}^n$.
   (i) Calcolare l'applicazione composta $F_A \circ F_B$ dove $F_B : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e $F_A : \mathbf{R}^3 :\longrightarrow \mathbf{R}^2$ sono individuate dalle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$

   (ii) Calcolare le composizioni $F_A \circ F_B$ e $F_B \circ F_A$ dove $F_B : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^4$ e $F_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}$ sono individuate dalle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\quad F_A \circ F_B(4), \quad F_A \circ F_B(0), \quad F_A \circ F_B(11).$

Calcolare $\quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$

(iii) Calcolare le composizioni $F_A \circ F_B$ e $F_B \circ F_A$, dove $F_A,\ F_B : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ sono individuate dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sol. Si tratta dell'applicazione $F_A \circ F_B(X) = ABX$. Dunque è rappresentata dalla matrice

$$(\,1 \quad 0 \quad -3 \quad 2\,)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(ii) $F_A \circ F_B$ è rappresentata dalla matrice $AB = (-7)$. L'applicazione $F_B \circ F_A$ è invece rappresentata dalla matrice

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ne segue che $F_A \circ F_B(4) = -28$; $F_A \circ F_B(0) = 0$; $F_A \circ F_B(11) = -77$;

$$F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(iii) La composizione $F_A \circ F_B$ è rappresentata dalla matrice

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La composizione $F_B \circ F_A$ è invece rappresentata dalla matrice

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Calcolare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine delle applicazioni lineari:
   (i) $L_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

   (ii) $L_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (iii) $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

   (iv) $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Sol. Il nucleo di L_A è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo rappresentato dalla matrice A. Dal teorema di Rouché-Capelli si ha pertanto $\dim(\ker(L_A)) = 4 - \text{rango}(A)$. D'altra parte l'immagine di L_A è generata dalle colonne di A e dunque $\dim(\text{im}(L_A)) = \text{rango}(A)$. Si vede così che tutto si riduce a calcolare il rango della matrice A, il che può essere fatto con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque il rango di A è 3, da cui $\dim(\ker(L_A)) = 1$ e $\dim(\mathrm{im}(L_A)) = 3$.
(ii) Mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan otteniamo immediatamente che il rango di A è 2, da cui $\dim(\ker(L_A)) = 2$ e $\dim(\mathrm{im}(L_A)) = 2$.
(iii) La matrice associata ad F è $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, che si vede facilmente avere rango 2. Ne segue $\dim(\ker(F)) = 0$ e $\dim(\mathrm{im}(F)) = 2$.
(iv) La matrice associata ad F è $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, che si vede facilmente avere rango 2. Ne segue $\dim(\ker(F)) = 1$ e $\dim(\mathrm{im}(F)) = 2$.

6. Siano $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

e $G : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare individuata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare $\ker(F)$, $\ker(G)$, $\mathrm{im}(F)$ e $\mathrm{im}(G)$.
(ii) Calcolare la matrice associata a F e a $G \circ F$.
(iii) Calcolare $\ker(G \circ F)$ e $\mathrm{im}(G \circ F)$.

Sol. (i) Per calcolare $\ker(F)$ dobbiamo semplicemente risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione di questo sistema è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\ker(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Per calcolare $\ker(G)$ cominciamo con lo scrivere

$$G(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

A questo punto l'unica cosa che dobbiamo fare è risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Usiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = (1/2)x_4 \\ x_2 = (3/2)x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $\ker(G) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. per determinare l'immagine di F scriviamo la matrice associata ad F. Si tratta della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto $\operatorname{im}(F) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ (si vede facilmente che questi due vettori sono linearmente indipendenti). Per scrivere l'immagine di G utilizziamo invece la matrice associata a G; otteniamo: $\operatorname{im}(G) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. dall'analisi fatta sopra mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan, sappiamo che i primi tre di questi vettori sono lineramente indipendenti. Ma tre vettori indipendenti in $\mathbf{R}^3$ sono una base. Dunque $\operatorname{im}(G) = \mathbf{R}^3$.

(ii) Abbiamo già calcolato la matrice associata ad F nel punto (i). La matrice associata a $G \circ F$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(iii) Per determinare $\ker(G \circ F)$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $x_1 = 2x_2$, ovvero $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ne segue $\ker(G \circ F) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

L'immagine di $G \circ F$ è $\mathrm{im}(G \circ F) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

7. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U = \dim F(U)$.
(ii) Determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U > \dim F(U)$.
(iii) Dimostrare che in generale, data un'applicazione lineare $F\colon V \to W$, non esiste nessun sottospazio $U \subset V$ tale che $\dim U < \dim F(U)$.

Sol. (i) Osserviamo che $\ker F = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, dunque F non è iniettiva. Un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U = \dim F(U)$ è un qualunque sottospazio che interseca $\ker F$ nel vettore nullo. Ad esempio $U = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, oppure $U = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Nel primo caso $F(U) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, e vale $\dim U = \dim F(U) = 1$. Nel secondo caso $F(U) = span\{\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, e vale $\dim U = \dim F(U) = 2$;
(ii) Un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U > \dim F(U)$ è un qualunque sottospazio che ha intersezione di dimensione positiva con $\ker F$. Ad esempio il nucleo stesso.
Oppure $U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. In questo caso, $F(U) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e vale $\dim U = 2 > \dim F(U) = 1$.
(iii) Vedi dispense.