

1. Sia  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare e disegnare  $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .
- (ii) Cosa fa geometricamente  $F$ ?
- (iii) Calcolare e disegnare  $F(U)$ , dove  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ .

*Sol.* (i) Poiché per definizione  $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , si ha

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Geometricamente  $F$  è la riflessione rispetto all'asse  $x_2$ .

(iii) Per linearità,  $F(\text{span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}) = \text{span}\{F(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix})\} = \text{span}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$ . In altre parole, la retta per l'origine generata dal vettore  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  viene mandata da  $F$  nella retta per l'origine generata dal vettore  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

2. Sia  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare e disegnare  $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .
- (ii) Cosa fa geometricamente  $F$ ?
- (iii) Calcolare e disegnare  $F(U)$ , dove  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ . Confrontare le dimensioni  $\dim U$  e  $\dim F(U)$ .
- (iv) Calcolare e disegnare  $F(U)$ , dove  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$ . Confrontare le dimensioni  $\dim U$  e  $\dim F(U)$ .
- (v) Calcolare e disegnare  $F(U)$ , dove  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ . Confrontare le dimensioni  $\dim U$  e  $\dim F(U)$ .
- (vi) Calcolare e disegnare  $F(U)$ , dove  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ . Confrontare le dimensioni  $\dim U$  e  $\dim F(U)$ .

Sol. (i) Dalla definizione

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Geometricamente  $F$  proietta un vettore sul piano  $x_3 = 0$  e poi lo riflette rispetto all'asse  $x_2$ .

(iii)  $F(U) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}; \dim U = \dim F(U) = 1.$

(iv)  $F(U) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}; \dim U = \dim F(U) = 1.$

(v)  $F(U) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}; \dim U = 2, \dim F(U) = 1.$

(vi)  $F(U) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}; \dim U = 2, \dim F(U) = 1.$

3. Quali applicazioni  $A$  sono mappe lineari?

(i)  $A : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  data da  $A(x) = |x|$ ;

(ii)  $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  data da

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix};$$

(iii)  $A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  data da

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + 2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix};$$

(iv)  $A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  data da

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \end{pmatrix};$$

(v)  $A : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$  data da

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4^2 \end{pmatrix}.$$

*Sol.* (i) No. Ad esempio  $A(-1) = |-1| = 1$ ;  $A(1) = |1| = 1$  e dunque prendendo  $\lambda = -1$  e  $x = 1$  si ha  $A(\lambda x) \neq \lambda A(x)$ .

(ii) Si. Segue dal fatto che tutte le righe del vettore colonna  $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$  sono lineari nelle coordinate  $x_1, \dots, x_n$ .

(iii) No. La prima riga del vettore  $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + 2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$  non è lineare nelle coordinate, contenendo un termine noto. In particolare  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(iv) Si. Segue dal fatto che tutte le righe del vettore colonna  $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$  sono lineari nelle coordinate  $x_1, \dots, x_n$ .

(v) No. La seconda riga del vettore  $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4^2 \end{pmatrix}$  non è lineare nelle coordinate, contenendo un termine di secondo grado. In particolare si ha

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Sia  $M$  una matrice  $m \times n$ . Indichiamo con  $F_M: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  l'applicazione data dalla moltiplicazione matrice-vettore  $F_M(X) = MX$ , con  $X \in \mathbf{R}^n$ .

(i) Calcolare l'applicazione composta  $F_A \circ F_B$  dove  $F_B: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  e  $F_A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  sono individuate dalle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare  $F_A \circ F_B \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $F_A \circ F_B \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ,  $F_A \circ F_B \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ .

(ii) Calcolare le composizioni  $F_A \circ F_B$  e  $F_B \circ F_A$  dove  $F_B: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^4$  e  $F_A: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$  sono individuate dalle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A = (1 \ 0 \ -3 \ 2).$$

Calcolare  $F_A \circ F_B(4)$ ,  $F_A \circ F_B(0)$ ,  $F_A \circ F_B(11)$ .

Calcolare  $F_B \circ F_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F_B \circ F_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $F_B \circ F_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ .

(iii) Calcolare le composizioni  $F_A \circ F_B$  e  $F_B \circ F_A$ , dove  $F_A, F_B: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  sono individuate dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Sol.* (i) Si tratta dell'applicazione  $F_A \circ F_B(X) = ABX$ . Dunque è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$F_A \circ F_B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_A \circ F_B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_A \circ F_B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(ii)  $F_A \circ F_B$  è rappresentata dalla matrice  $AB = \begin{pmatrix} -7 \\ \end{pmatrix}$ . L'applicazione  $F_B \circ F_A$  è invece rappresentata dalla matrice

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ne segue che  $F_A \circ F_B(4) = -28$ ;  $F_A \circ F_B(0) = 0$ ;  $F_A \circ F_B(11) = -77$ ;

$$F_B \circ F_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$F_B \circ F_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_B \circ F_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(iii) La composizione  $F_A \circ F_B$  è rappresentata dalla matrice

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La composizione  $F_B \circ F_A$  è invece rappresentata dalla matrice

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Calcolare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine delle applicazioni lineari:

(i)  $L_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$  dove  $A$  è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

(ii)  $L_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$  dove  $A$  è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii)  $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$  data da

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(iv)  $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$  data da

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

*Sol.* Il nucleo di  $L_A$  è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo rappresentato dalla matrice  $A$ . Dal teorema di Rouché-Capelli si ha pertanto  $\dim(\ker(L_A)) = 4 - \text{rango}(A)$ . D'altra parte l'immagine di  $L_A$  è generata dalle colonne di  $A$  e dunque  $\dim(\text{im}(L_A)) = \text{rango}(A)$ . Si vede così che tutto si riduce a calcolare il rango della matrice  $A$ , il che può essere fatto con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque il rango di  $A$  è 3, da cui  $\dim(\ker(L_A)) = 1$  e  $\dim(\text{im}(L_A)) = 3$ .

(ii) Mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan otteniamo immediatamente che il rango di  $A$  è 2, da cui  $\dim(\ker(L_A)) = 2$  e  $\dim(\text{im}(L_A)) = 2$ .

(iii) La matrice associata ad  $F$  è  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , che si vede facilmente avere rango 2. Ne segue  $\dim(\ker(F)) = 0$  e  $\dim(\text{im}(F)) = 2$ .

(iv) La matrice associata ad  $F$  è  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , che si vede facilmente avere rango 2. Ne segue  $\dim(\ker(F)) = 1$  e  $\dim(\text{im}(F)) = 2$ .

6. Siano  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$  l'applicazione lineare

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

e  $G : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare individuata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare  $\ker(F)$ ,  $\ker(G)$ ,  $\text{im}(F)$  e  $\text{im}(G)$ .
- (ii) Calcolare la matrice associata a  $F$  e a  $G \circ F$ .
- (iii) Calcolare  $\ker(G \circ F)$  e  $\text{im}(G \circ F)$ .

*Sol.* (i) Per calcolare  $\ker(F)$  dobbiamo semplicemente risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione di questo sistema è  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ovvero  $\ker(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Per calcolare  $\ker(G)$  cominciamo con lo scrivere

$$G\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

A questo punto l'unica cosa che dobbiamo fare è risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Usiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = (1/2)x_4 \\ x_2 = (3/2)x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ovvero  $\ker(G) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . per determinare l'immagine di  $F$  scriviamo la matrice associata ad  $F$ . Si tratta della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto  $\text{im}(F) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  (si vede facilmente che questi due vettori sono linearmente indipendenti).

Per scrivere l'immagine di  $G$  utilizziamo invece la matrice associata a  $G$ ; otteniamo:  $\text{im}(G) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . dall'analisi fatta sopra mediante

l'algoritmo di Gauss-Jordan, sappiamo che i primi tre di questi vettori sono linearmente indipendenti. Ma tre vettori indipendenti in  $\mathbf{R}^3$  sono una base. Dunque  $\text{im}(G) = \mathbf{R}^3$ .

(ii) Abbiamo già calcolato la matrice associata ad  $F$  nel punto (i). La matrice associata a  $G \circ F$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(iii) Per determinare  $\ker(G \circ F)$  dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è  $x_1 = 2x_2$ , ovvero  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ne segue  $\ker(G \circ F) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

L'immagine di  $G \circ F$  è  $\text{im}(G \circ F) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

7. Sia  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare un sottospazio  $U \subset \mathbf{R}^3$  tale che  $\dim U = \dim F(U)$ .
- (ii) Determinare un sottospazio  $U \subset \mathbf{R}^3$  tale che  $\dim U > \dim F(U)$ .
- (iii) Dimostrare che in generale, data un'applicazione lineare  $F: V \rightarrow W$ , non esiste nessun sottospazio  $U \subset V$  tale che  $\dim U < \dim F(U)$ .

*Sol.* (i) Osserviamo che  $\ker F = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ , dunque  $F$  non è iniettiva. Un sottospazio  $U \subset \mathbf{R}^3$  tale che  $\dim U = \dim F(U)$  è un qualunque sottospazio che interseca  $\ker F$  nel vettore nullo. Ad esempio  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ , oppure  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ . Nel primo caso  $F(U) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ,

e vale  $\dim U = \dim F(U) = 1$ . Nel secondo caso  $F(U) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ , e vale  $\dim U =$

$\dim F(U) = 2$ ;

(ii) Un sottospazio  $U \subset \mathbf{R}^3$  tale che  $\dim U > \dim F(U)$  è un qualunque sottospazio che ha intersezione di dimensione positiva con  $\ker F$ . Ad esempio il nucleo stesso.

Oppure  $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ . In questo caso,  $F(U) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$  e vale  $\dim U = 2 >$

$\dim F(U) = 1$ .

(iii) Vedi dispense.