

1. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 8 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare tutti i possibili prodotti fra coppie di matrici dell'insieme $\{A, B, C, D\}$.
 (ii) Calcolare le matrici trasposte ${}^tA, {}^tB, {}^tC, {}^tD$.
 (iii) Calcolare tutti i possibili prodotti fra coppie di matrici dell'insieme $\{{}^tA, {}^tB, {}^tC, {}^tD\}$.

Soluzione.

(i) Tutti i possibili prodotti sono:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 4 & 9 \\ 1 & -7 & 12 & 11 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}, \quad BC = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 16 & -8 \\ 16 & -8 \\ -2 & -16 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 32 \\ -1 & -15 & 4 & -7 \\ -1 & -15 & 4 & -7 \\ -2 & 2 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 17 & 16 & 16 \\ 9 & 10 & 10 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 25 & 8 & 1 & 29 \\ 14 & 5 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

(ii) Le matrici trasposte sono:

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Tutti i possibili prodotti sono:

$${}^tA{}^tC = {}^t(CA), \quad ({}^tB)^2 = {}^t(B^2), \quad {}^tB{}^tA = {}^t(AB), \quad {}^tC{}^tA = {}^t(AC), \quad {}^tC{}^tB = {}^t(BC), \quad {}^tD{}^tC = {}^t(CD).$$

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Calcolare $A \cdot (B \cdot C)$ e $(A \cdot B) \cdot C$.

Soluzione.

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 12 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -90 & -204 \\ 45 & 102 \end{pmatrix} = (A \cdot B) \cdot C,$$

per l'associatività del prodotto fra matrici.

3. Determinare due matrici A, B per cui esiste $A \cdot B$ ma non esiste $B \cdot A$.

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Determinare due matrici non quadrate A, B per cui esistono entrambi i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e calcolarli.

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 10 \\ -3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Determinare due matrici quadrate A, B per cui i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono diversi: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Determinare due matrici $A \neq B$, diverse dalla matrice nulla O , tali che $A \cdot B = O$.

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Determinare una matrice A , diversa dalla matrice nulla O , tale che $A^2 = O$.

Soluzione. Una matrice A con queste proprietà deve essere non invertibile. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Determinare una matrice A , diversa dalla matrice identità, tale che $A^2 = A$.

Soluzione. Una matrice A con queste proprietà deve essere non invertibile, altrimenti moltiplicando entrambi i termini dell'equazione per A^{-1} si troverebbe $A = I_2$. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

9. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare due matrici B, C quadrate 2×2 , diverse tra loro $B \neq C$, tali che $A \cdot B \neq A \cdot C$.

Soluzione. Questo è possibile perché A è non invertibile, altrimenti moltiplicando entrambi i termini dell'equazione per A^{-1} si troverebbe $B = C$. Ad esempio

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AC = AB = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Calcolare ${}^tA \cdot {}^t(B \cdot C)$ e ${}^t(A \cdot B) \cdot {}^tC$.

Soluzione.

$${}^tA \cdot {}^t(B \cdot C) = {}^tA \cdot {}^tC \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix};$$

$${}^t(A \cdot B) \cdot {}^tC = {}^tB \cdot {}^tA \cdot {}^tC = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 45 & 15 \end{pmatrix}.$$