

1. Siano dati i sottospazi di \mathbb{R}^3

$$V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}\right\}.$$

- (i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
- (ii) Calcolare $\dim V$, $\dim W$ e $\dim V \cap W$.
- (iii) Calcolare $\dim(V + W)$.

(i) Un generico elemento di V è un vettore della forma

$$v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 2\beta \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo per quali valori di α, β il vettore v soddisfa il sistema che definisce W . Sostituendo troviamo

$$\begin{cases} (\alpha - \beta) - (\alpha + \beta) = 0 \\ 2\beta - 2(\alpha + \beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Dunque $V \cap W = \{O\}$.

(ii) $\dim V = 2$ (i generatori di V sono linearmente indipendenti); $\dim W = 1$ (il sistema lineare omogeneo che definisce W ha due equazioni indipendenti); $\dim(V \cap W) = 0$.

(iii) $\dim(V + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. In particolare, $V + W = \mathbb{R}^3$.

2. Siano dati i sottospazi di \mathbb{R}^3

$$V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_3 = 0\right\}.$$

- (i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
- (ii) Calcolare le dimensioni $\dim V$, $\dim W$ e $\dim V \cap W$.
- (iii) Calcolare $\dim(V + W)$.

Determiniamo per quali valori di α, β il generico vettore $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha + \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \in V$ soddisfa il sistema che definisce W . Sostituendo troviamo

$$\alpha - \alpha = 0.$$

Dunque $V \subset W$. Poiché $\dim V = 2$ e $\dim W = 2$ (il sistema lineare omogeneo che definisce W ha una equazione non banale), si ha che $V = W = V \cap W = V + W$. In particolare, $\dim(V \cap W) = 2$ e $\dim(V + W) = 2 + 2 - 2 = 2$.

3. Siano dati i sottospazi di \mathbb{R}^3

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}\right\}.$$

- (i) È vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$?
 (ii) Determinare sottospazi Z e V di \mathbb{R}^3 tali che

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus Z, \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus V.$$

- (i) Si ha $\dim U = 1$, $W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e $\dim W = 1$. Poiché $\dim U + W \leq 2$, il sottospazio $U + W$ è strettamente contenuto in \mathbb{R}^3 . Precisamente, $U \cap W = \{O\}$ e $\dim U + W = 2$.
 (ii) Per esempio

$$Z = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ciò segue dal fatto che le terne

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

sono indipendenti.

4. Siano dati i sottospazi di \mathbb{R}^4

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad V = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}\right\}.$$

- (i) Calcolare $U + V$ e $\dim(U + V)$.
 (ii) Calcolare $\dim U$, $\dim V$, e $\dim(U \cap V)$.

(i) Si ha

$$V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad U + V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Si vede subito che gli ultimi 4 generatori di $U + V$ sono linearmente indipendenti. Per cui $\dim(U + V) = 4$ e $U + V = \mathbb{R}^4$.

(ii) Si verifica facilmente che $\dim U = 3$, $\dim V = 2$. Per cui $\dim(U \cap V) = 3 + 2 - 4 = 1$.

5. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

- (i) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
- (ii) Completarli ad una base di \mathbb{R}^3 in tre modi diversi.
- (iii) Esibire un complemento per ognuno dei sottospazi: $\text{span}\{\mathbf{v}_1\}$, $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$.

(i) Poiché $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ non sono uno multiplo dell'altro, sono linearmente indipendenti.

(ii) Tre possibili completamenti di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ad una base di \mathbb{R}^3 sono dati per esempio da

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) $\text{span}\{\mathbf{v}_1\}^c = \text{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^c = \text{span}\{\mathbf{v}_3\}$ e $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}^c = \text{span}\{\mathbf{v}_2\}$.

6. Determinare due sottospazi U e W di \mathbb{R}^4 tali che $\mathbb{R}^4 = U + W$, senza che la somma sia diretta.

Ad esempio

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

In questo caso $U + W = \mathbb{R}^4$, ma $\dim U \cap W = 1$.