

(2.A) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ due vettori in \mathbf{R}^3 .

- (i) Calcolare $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$ e $-2\mathbf{x} + \mathbf{y}$.
 (ii) Calcolare le lunghezze di questi vettori.

Sol. (i)

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad -2\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{x} + 3\mathbf{y}\| = \sqrt{218}, \quad \|-2\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{34}.$$

(2.B) Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} i vettori dell'Eserc.2.A.

- (i) Calcolare i prodotti scalari $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ e anche $\mathbf{x} \cdot (5\mathbf{x} + 7\mathbf{y})$.
 (ii) Calcolare il coseno dell'angolo fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .
 (iii) Calcolare il coseno dell'angolo fra \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Sol. (i)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 13; \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 14; \quad \mathbf{x} \cdot (5\mathbf{x} + 7\mathbf{y}) = 5\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 7\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 161.$$

(ii) Se indichiamo con φ l'angolo tra \mathbf{x} e \mathbf{y} , si ha

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = \frac{13}{14}$$

(ii) Se indichiamo con ψ l'angolo tra \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, si ha

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

(2.C) Sia \mathbf{x} il vettore dell'Eserc.2.A.

- (i) Trovare un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$.
 (ii) Trovare un vettore $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tale che

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0. \end{cases}$$

Sol. (i) Se

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = v_1 - 2v_2 + 3v_3$ e dunque i vettori \mathbf{v} soluzioni di $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ sono tutti e soli quelli per cui $v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0$. Una soluzione non banale di quest'equazione è

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Il vettore \mathbf{w} deve essere ortogonale sia a \mathbf{x} che a \mathbf{v} . Una soluzione possibile è $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$. Se indichiamo con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ la base canonica di \mathbf{R}^3 , allora

$$\mathbf{v} \times \mathbf{x} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(2.D) Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ un vettore non nullo. Sia $\lambda = \|\mathbf{v}\|$.

- (i) Calcolare la lunghezza di $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.
- (ii) Trovare un vettore parallelo a \mathbf{v} che abbia lunghezza $1/\lambda$.

Sol. (i) Il vettore $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$ ha lunghezza 1 (vedi la soluzione dell'esercizio (1.I)).

(ii) Un vettore parallelo a \mathbf{v} ha la forma $t\mathbf{v}$ per qualche $t \in \mathbf{R}$. Dobbiamo perciò determinare t in modo che si abbia $\|t\mathbf{v}\| = 1/\lambda$. Poiché

$$\|t\mathbf{v}\| = |t| \|\mathbf{v}\| = \lambda |t|,$$

ricaviamo $|t| = 1/\lambda^2$, da cui $t = \pm 1/\lambda^2$.

(2.E) Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due vettori in \mathbf{R}^3 . Sia

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \\ (x_3 + y_3)/2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le distanze $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$.
- (ii) Far vedere che \mathbf{v} è il punto medio fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Sol. L'esercizio è completamente analogo all'esercizio (1.G).

(2.F) Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} i due vettori dell'Eserc.2.A.

- (i) Calcolare $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
- (ii) Calcolare $\mathbf{x} \times (-\mathbf{y})$.
- (iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Sol. (i) Si ha

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Il prodotto vettoriale è bilineare, dunque

$$\mathbf{x} \times (-\mathbf{y}) = -(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(iii) L'area del triangolo in questione è $(1/2)\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = (3/2)\sqrt{3}$

(2.G) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Trovare un vettore \mathbf{v} perpendicolare sia a \mathbf{x} che a \mathbf{y} .
- (ii) Trovare un vettore come nella parte (i), di lunghezza 1.

Sol. (i)

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Basta dividere \mathbf{v} per la sua norma:

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

(2.H) Siano \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} i vettori in \mathbf{R}^3 dati da

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare le lunghezze di \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} e i coseni degli angoli fra \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} .

Sol. (i) Si ha $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{z}\| = 7$. Indichiamo con $\varphi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ l'angolo compreso tra i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} . Si calcola

$$\cos \varphi_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = 0$$

$$\cos \varphi_{\mathbf{y},\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}}{\|\mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{z}\|} = 0$$

$$\cos \varphi_{\mathbf{z},\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{z}\| \cdot \|\mathbf{x}\|} = 0$$

(2.I) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare i vettori $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}$ ed $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$.

(ii) Calcolare $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ ed $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$.

Sol. (i) Indichiamo con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} la base canonica di \mathbf{R}^3 . Si ha

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Analogamente

$$\mathbf{y} \times \mathbf{z} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Si noti come il prodotto vettoriale non sia associativo.

(ii) Si ha

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$