Cognome .... **Nome** ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare e sintetiche.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. *Sia* $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \mod 7\}$. *Costruire un'applicazione biiettiva* $f\colon \mathbb{N} \to A$.

Sol. L'applicazione

$$f\colon \mathbb{Z} \to A, \quad m \mapsto 3 + 7m$$

è una biezione fra $\mathbb{Z}$ ed A.
È iniettiva: $3 + 7m = 3 + 7n$ implica $m = n$;
È suriettiva: poiché ogni elemento $x \in A$ si può scrivere come $x = 3 + 7k$ per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$, l'applicazione f è anche suriettiva. Ricordiamo che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità. Fissiamo una biiezione $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. La composizione $f \circ g\colon \mathbb{N} \to A$ è la biiezione cercata.

2. *Sia* A *un insieme. Sull'insieme* $\mathcal{P}(A)$ *consideriamo la relazione* R *definita come segue: dati* $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, *diciamo che* XRY *se* $X \cap Y \neq \emptyset$. *Determinare se* R *è o meno riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva (giustificare le risposte con eventuali controesempi).*

Sol. $X \cap X \neq \emptyset$ se e solo se $X \neq \emptyset$. Quindi la relazione non è riflessiva;
$X \cap Y \neq \emptyset$ implica $Y \cap X = X \cap Y \neq \emptyset$. Quindi la relazione è simmetrica;
$X \cap Y \neq \emptyset$ e $Y \cap X \neq \emptyset$ non implica $X = Y$. Quindi la relazione non è antisimmetrica. Ad esempio se $X = [0, 2]$ e $Y = [1, 3]$ abbiamo $X \cap Y \neq \emptyset$ ma $X \neq Y$.
$X \cap Y \neq \emptyset$ e $Y \cap Z \neq \emptyset$ non implica $X \cap Z \neq \emptyset$. Quindi la relazione non è transitiva. Ad esempio se $X = [0, 2]$ e $Y = [1, 4]$ e $Z = [3, 5]$ abbiamo $X \cap Y \neq \emptyset$, $Y \cap Z \neq \emptyset$ ma $X \cap Z = \emptyset$.

3. *Sia* $A = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \neq 0\}$. *Dati* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *e* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *in* A, *diciamo che* $X\,R\,Y$ *se* $x_1 y_1 > 0$ *e* $x_2 y_2 > 0$.
   (a) Verificare che R *è una relazione di equivalenza;*
   (b) Determinare quante sono le classi di equivalenza di A *ed esibire un elemento di ogni classe.*

Sol. (a) La relazione R è riflessiva: per $X = Y$ abbiamo $x_1^2 > 0$ e $x_2^2 > 0$. Dunque XRX.
La relazione R è simmetrica: da $x_1 y_1 > 0$ e $x_2 y_2 > 0$ segue che $y_1 x_1 > 0$ e $y_2 x_2 > 0$ (per la commutatività del prodotto fra numeri reali). Dunque XRY implica YRX.
La relazione R è transitiva: osserviamo che vale $ab > 0$ se e solo se a e b sono dello stesso segno. Se le coppie $x_1 \& y_1$ e $y_1 \& z_1$ sono dello stesso segno anche la coppia $x_1 \& z_1$ è dello stesso segno. Se le coppie $x_2 \& y_2$ e $y_2 \& z_2$ sono dello stesso segno anche la coppia $x_2 \& z_2$ è dello stesso segno. In conclusione XRY e YRZ implica XRZ.
(b) Le classi di equivalenza di A sono quattro

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}] = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0\}, \qquad [\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}] = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0,\ x_2 < 0\},$$

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}] = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0,\ x_2 < 0\}, \qquad [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}] = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0,\ x_2 > 0\}.$$

I quattro vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartengono ognuno ad una e una sola delle varie classi.

4. *Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza* $2x \equiv 5 \mod 7$. *Determinare le soluzioni che soddisfano la condizione* $0 \leq x \leq 30$.

Sol. Le soluzioni intere della congruenza $2x \equiv 5 \mod 7$ sono tutte e sole della forma $x = x_0 + k7$, dove x_0 è una qualunque soluzione particolare della congruenza stessa e k varia in $\mathbb{Z}$. Per determinare una soluzione particolare della congruenza, consideriamo l'equazione diofantea $2x + 7k = 5$: una sua soluzione particolare è data da $(-15, 5)$ (si vede facilmente che $(-3, 1)$ è una soluzione particolare di $2x + 7k = mcd(2, 7) = 1$. Moltiplicando tutto per 5 si trova una soluzione particolare di $2x + 7k = 5$). Dunque $x_0 = -15$ è una soluzione particolare della congruenza, mentre la *soluzione generale* risulta $x = -15 + k7, \quad k \in \mathbb{Z}$, ossia

$$x = 6 + 7k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le soluzioni che soddisfano la condizione $0 \leq x \leq 30$ sono ottenute per $k = 0, 1, 2, 3$ e sono date rispettivamente da

$$x = 6, \quad 13, \quad 20, \quad 27.$$

5. *Senza fare le operazioni per esteso, calcolare il resto della divisione per 5, per 10 e per 7 (ossia la classe resto modulo 5, 10 e 7) delle seguenti espressioni*

$$547 + 567, \quad 456 \times 343, \qquad 47^3.$$

Sol. Modulo 5:

$$\overline{547 + 567} \equiv \bar{2} + \bar{2} \equiv \bar{4}, \quad \overline{456 \times 343} \equiv \bar{1} \cdot \bar{3} \equiv \bar{3}, \qquad \overline{47^3} \equiv \bar{2}^3 \equiv \bar{3}.$$

Modulo 10:

$$\overline{547 + 567} \equiv \bar{7} + \bar{7} \equiv \overline{14} \equiv \bar{4}, \quad \overline{456 \times 343} \equiv \bar{6} \cdot \bar{3} \equiv \overline{18} \equiv \bar{8}, \qquad \overline{47^3} \equiv \bar{7}^3 \equiv \bar{9} \cdot \bar{7} \equiv \bar{3}.$$

Modulo 7:

$$\overline{547 + 567} \equiv \bar{1} + \bar{0} \equiv \bar{1}, \quad \overline{456 \times 343} \equiv \bar{1} \cdot \bar{0} \equiv \bar{0}, \qquad \overline{47^3} \equiv \bar{5}^3 \equiv \bar{4} \cdot \bar{5} \equiv \bar{6}.$$

6. *Sia* $\mathbb{Z}_{18}^*$ *il gruppo delle classi resto modulo* 18 *che ammettono inverso moltiplicativo. Determinare se* $\bar{5}$ *e* $\bar{6}$ *appartengono a* $\mathbb{Z}_{18}^*$. *In caso affermativo, calcolarne l'inverso.*

Sol. Abbiamo che $mcd(6, 18) = 3 \neq 1$, dunque $\bar{6}$ non appartiene a $\mathbb{Z}_{18}^*$ (cioè non ammette inverso moltiplicativo in $\mathbb{Z}_{18}$);
invece $mcd(5, 18) = 1$, dunque $\bar{5}$ appartiene a $\mathbb{Z}_{18}^*$. Per definizione l'inverso $\bar{5}^{-1}$ è una classe $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{18}$ tale che

$$\bar{x} \cdot \bar{5} \equiv \bar{1} \mod 18.$$

Una soluzione particolare dell'equazione diofantea associata $5x + 18k = 1$ è data da $(-7, 2)$. L'inverso cercato è dato da $\bar{x} \equiv \overline{-7} \equiv \overline{11} \mod 18$. Infatti $\overline{11} \cdot \bar{5} \equiv \overline{55} \equiv \bar{1} \mod 18$.