Cognome .... **Nome** ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare, sintetiche e complete.* NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Determinare tutte le soluzioni intere dei sistemi di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 1 \bmod 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 0 \bmod 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 0 \bmod 6. \end{cases}$$

Sol.: Il primo sistema ha soluzioni intere perché le singole congruenze hanno soluzioni intere (infatti $mcd(2,5) = 1$ che divide 2) ed inoltre $mcd(3,5) = 1$ che divide $1 - 2 = -1$. La soluzione generale del sistema è della forma

$$x = x_0 + M15, \quad M \in \mathbb{Z},$$

dove x_0 è una qualunque soluzione particolare. Da semplici calcoli (provare....) segue che

$$x = 1 + M15, \quad M \in \mathbb{Z}.$$

Il secondo sistema non ha soluzioni, perché $mcd(3,6) = 3$ non divide 1. A maggior ragione il terzo sistema, che contiene le due equazioni del secondo, non ha soluzioni intere.

2. Sia $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali. Sia R la relazione su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ così definita:

$$(a, b)\, R\, (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$$

   (a) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza.
   (b) Sia $X = \{1, 2\}$. Determinarne la partizione del sottoinsieme $X \times X$ di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ indotta dalla relazione R.

Sol.: (a) La relazione è riflessiva, cioè $(a, b)R(a, b)$, per ogni (a, b). Infatti $ab = ab$, per ogni (a, b).
La relazione è simmetrica, cioè $(a, b)R(c, d)$ implica $(c, d)R(a, b)$. Infatti $ad = bc$ implica $cb = da$.
La relazione è transitiva, cioè $(a, b)R(c, d)$ e $(c, d)R(e, f))$ implica $(a, b)R(e, f)$. Poiché b, d, f sono tutti diversi da zero, da $ad = bc$ e $cf = de$ ricaviamo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$. Ne segue $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ e dunque $af = eb$ come richiesto.

(b) Gli elementi di $X \times X$ sono $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$. La partizione di $X \times X$ indotta dalla relazione R (cioè formata dalle classi di equivalenza rispetto ad R in $X \times X$) è data da

$$\{(1, 1), (2, 2)\} \bigcup \{(1, 2)\} \bigcup \{(2, 1)\}.$$

Infatti $(1, 1)$ e $(2, 2)$ sono gli unici elementi distinti di $X \times X$ che sono in relazione fra loro.

3. Siano dati $a = 200$, $b = 11$, $c = 1000$.
   (a) Determinare quali fra a, b, c ammettono inverso moltiplicativo in $\mathbb{Z}^*_{1001}$ (giustificare la risposta).
   (b) Determinare l'inverso moltiplicativo in $\mathbb{Z}^*_{1001}$ degli elementi invertibili trovati al punto precedente.

Sol.: (a) Abbiamo $1001 = 5 \cdot 200 + 1$, da cui $mcd(200, 101) = 1$;
$1001 = 1 \cdot 1000 + 1$, da cui $mcd(200, 101) = 1$;
$1001 = 91 \cdot 11$, da cui $mcd(11, 1001) = 11$. Conclusione: 200 e 1000 ammettono inverso moltiplicativo in $\mathbb{Z}^*_{1001}$, mentre 11 no.

(b) Dalla prima equazione del punto precedente abbiamo

$-5 \cdot 200 = 1 - 1001$, cioè $-5 \cdot 200 \equiv 1 \bmod 1001$. In altre parole l'inverso moltiplicativo di 200 in $\mathbb{Z}^*_{1001}$ è uguale a $-5 \equiv 996$.
Dalla seconda equazione del punto precedente abbiamo
$(-1) \cdot 1000 = 1 - 1001$, cioè $1000^{-1} \equiv -1 \bmod 1001$ e l'inverso moltiplicativo di 1000 in $\mathbb{Z}^*_{1001}$ è uguale a 1000 (scegliendo un rappresentante della classe resto di 1000^{-1} fra 1 e 1000).

4. Sia p un numero primo. Determinare la cardinalità di $\mathbb{Z}^*_p$, la cardinalità di $\mathbb{Z}^*_{p^2}$ e in generale la cardinalità di $\mathbb{Z}^*_{p^k}$, per $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, spiegando bene la risposta.

Sol.: Sia $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Le classi resto modulo n che ammettono inverso moltiplicativo sono date da $\mathbb{Z}^*_n = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_n \mid mcd(x, n) = 1\}$. Se $n = p$ è primo, abbiamo che $mcd(x, p) = 1$ se e solo se p non divide x (cioè x non è un multiplo intero di p. Ciò equivale a dire che $x \not\equiv 0 \bmod p$). Ne segue che $\mathbb{Z}^*_p = \{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$ e $|\mathbb{Z}^*_p| = p - 1$.
Consideriamo adesso

$$\mathbb{Z}_{p^2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p^2-1}\} = \{\bar{1}, \ldots, \overline{p^2-1}, \bar{p}\}.$$

Poiché p è primo, $mcd(x, p^2) = 1$ se e solo se p non divide x, cioè x non è un multiplo intero di p. Ne segue che le classi $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{p^2}$ che non ammettono inverso moltiplicativo sono tante quante i multipli interi di p compresi fra 1 e p^2. Ne segue che $|\mathbb{Z}^*_{p^2}| = p^2 - p^2/p = p^2 - p$.
Con un ragionamento simile si ottiene che la cardinalità di $\mathbb{Z}^*_{p^k}$ è uguale a $p^k - p^k/p = p^k - p^{k-1}$.

5. Determinare se i seguenti enunciati *con dominio* $\mathbb{R}$ sono veri o falsi, giustificando bene la risposta. Per ognuno di essi scrivere la negazione (N.B.: non ci devono essere negazioni davanti ai quantificatori):
   (a) $\exists x \ : \ x^3 = -1$
   (b) $\exists x \ : \ x^4 < x^2$
   (c) $\forall x \ : \ 2x > x$.

Sol.: (a) VERA: infatti per $x = -1$ vale $(-1)^3 = -1$.
La sua negazione: $\forall x \quad x^3 \neq -1$.
(b) VERA: infatti per $x = \frac{1}{2}$ vale $\frac{1}{2}^4 = \frac{1}{16} < \frac{1}{4} = \frac{1}{2}^2$.
La sua negazione: $\forall x \ : \ x^4 \geq x^2$.
(c) FALSA: infatti per $x = -1$ vale $2x = -2 < -1 = x$.
La sua negazione: $\exists x \ : \ 2x \leq x$.

6. Determinare la soluzione dell'equazione ricorsiva $a_n - 5a_{n-1} = 5^n$, per $n \geq 1$, che soddisfa la condizione iniziale $a_0 = 3$.

Sol. Consideriamo l'equazione lineare omogenea associata $a_n - 5a_{n-1} = 0$, con polinomio caratteristico $\lambda - 5 = 0$. La soluzione generale di tale equazione è data dalle successioni della forma

$$H_n = A5^n, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione $a_n - 5a_{n-1} = 5^n$. Poiché 5 è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $p_n = Bn5^n$, con $B \in \mathbb{R}$ da ricavare sostituendo p_n nell'equazione:

$$Bn5^n - 5B(n-1)5^{n-1} = 5^n \quad \Leftrightarrow \quad Bn - B(n-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B = 1.$$

Dunque una soluzione particolare è data da $p_n = n5^n$ (provare per credere).
La soluzione generale dell'equazione $a_n - 5a_{n-1} = 5^n$ è data dalle successioni della forma

$$S_n = A5^n + n5^n, \quad A \in \mathbb{R},$$

con A da determinare a partire dalle condizioni iniziali. Ponendo $n = 0$, troviamo

$$S_0 = A = 3.$$

Conclusione: la soluzione cercata è data da $\{a_n\}_n$, dove

$$a_n = 3 \cdot 5^n + n5^n, \quad n \geq 0.$$

(provare per credere).