Laboratorio di Matematica 2016 $\quad$ 2° esonero $\quad$ Roma, 11 gennaio 2017, 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare, sintetiche e complete.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.

1. *Decomporre i polinomi*

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 10x + 5, \qquad q(x) = x^4 - 4$$

in $\mathbf{C}[x]$, $\mathbf{R}[x]$ *e* $\mathbf{Q}[x]$, *ossia scrivere p e q come prodotto di polinomi a coefficienti in* $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ *e* $\mathbf{Q}$ *di grado più basso possibile.*

Sol.: Il primo polinomio si decompone come:

• $(x^2-5)(2x-1)$ in $\mathbf{Q}[x]$: le radici razionali di un polinomio a coefficienti interi $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ vanno cercate fra i quozienti p/q, dove $p|a_0$ e $q|a_n$. Nel nostro caso dunque nell'insieme $\{\pm 1, \pm 1/2, \pm 5, \pm 5/2\}$, dove troviamo la radice razionale $1/2$. È evidente che le radici di $x^2 - 5$ non sono razionali.

• $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(2x - 1)$ in $\mathbf{R}[x]$ ed in $\mathbf{C}[x]$.

Il secondo polinomio si decompone come:

• $(x^2-2)(x^2+2)$ in $\mathbf{Q}[x]$: le radici del primo fattore sono reali ma non razionali, quelle del secondo fattore sono complesse.

• $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2)$ in $\mathbf{R}[x]$

• $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$ in $\mathbf{C}[x]$.

2. *Siano dati i punti* $P_1 = (-1, 3)$, $P_2 = (0, -1)$, $P_3 = (1, 0)$.
   (a) Determinare il polinomio di grado due che contiene i punti dati.
   (b) Ce ne sono di grado 1?
   (c) Quanti sono quelli di grado 3?
   Spiegare bene le risposte.

Sol.: (a) Sappiamo che esiste un unico polinomio di secondo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$ che soddisfa le condizioni richieste. In questo caso è facile risolvere direttamente il sistema lineare corrispondente

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = -1 \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

L'unica soluzione è data da

$$\begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

che corrisponde al polinomio $p(x) = 5/2x^2 - 3/2x - 1$. Controllare che funziona!!

(b) Non ci sono polinomi di grado uno, con grafico una retta, che soddisfano le richieste, perché i punti non sono allineati.

(c) Ce ne sono infiniti di grado tre $p(x) = dx^3 + ax^2 + bx + c$: 4 coefficienti liberi e solo tre condizioni (compatibili).

3. *Completa le seguenti espressioni, illustrando e motivando le risposte:*
   a)$(214)_5 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)_{10}$
   b)$(326)_7 + (435)_7 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)_7$
   c) $(7232)_8 - (635)_8 = (\ldots\ldots\ldots\ldots)_8$

Sol.: (a) $(214)_5 = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 5^0 = 50 + 5 + 4 = (59)_{10}$.

(b) $(326)_7 + (435)_7 = (1064)_7$

(c) $(7232)_8 - (635)_8 = (6375)_8$

4. *Elenca le soluzioni del seguente sistema di congruenze (motivando la risposta e illustrando come esse possono essere trovate tramite il teorema cinese dei resti):*

$$\begin{cases} x \equiv 1 \quad (mod\, 7) \\ x \equiv 3 \quad (mod\, 5) \end{cases}$$

Sol.: Poiché $mcd(7, 5) = 1$, il teorema cinese dei resti dice che il sistema dato ammette soluzioni intere e che tutte le soluzioni intere si trovano a partire da una soluzione fissata x_0, ad esempio compresa fra 0 e 34, sommando ad essa multipli interi di 35:

$$x = x_0 + 35M, \qquad \text{al variare di } M \in \mathbf{Z}.$$

Per trovarne una, sostituiamo le souzioni della prima congruenza

$$x = 1 + 7k, \;\; k \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

nella seconda. Troviamo $1 + 7k = 3 + 5h$, con $k, h \in \mathbf{Z}$, da cui l'equazione diofantea

$$7k - 5h = 2. \tag{2}$$

Tutte le soluzioni intere dell'equazione (2) sono date da $(k, h) = (1, 1) + M(5, 7) = (1 + 5M, 1 + 7M)$, al variare di $M \in \mathbf{Z}$. Sostituendo $k = 1 + 5M$ nella (1) troviamo le soluzioni del sistema

$$x = 1 + 7(1 + 5M) = 8 + 35M, \quad M \in \mathbf{Z}.$$