**Laboratorio di Matematica, a.a. 2015-2016**

Test, 11 novembre 2015

1. *Risolvere la seguente disequazione goniometrica*

$$\Big(\cos x - \frac{1}{2}\Big)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \geq 0\ ,$$

*per* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

*Sol.:* Le soluzioni della disequazione so date da

$$\begin{cases} \cos x \geq \frac{1}{2} \\ (\sin x + \sqrt{3}\cos x) \geq 0 \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \bigcup \begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2} \\ (\sin x + \sqrt{3}\cos x) \leq 0 \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \{-\frac{\pi}{2}\} \bigcup \begin{cases} x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \\ \tan x \geq -\sqrt{3} \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \\ \tan x \leq -\sqrt{3} \end{cases}.$$

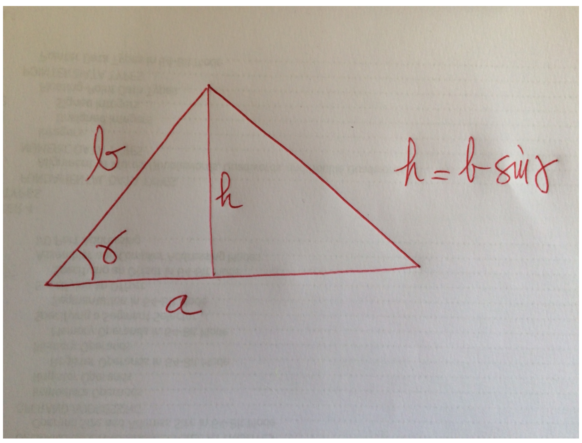
Tenendo conto che $\tan x$ è una funzione crescente su $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e che $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$, troviamo

$$\Leftrightarrow \qquad \{-\frac{\pi}{2}\} \bigcup \{x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]\} \bigcup \{x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})\}$$

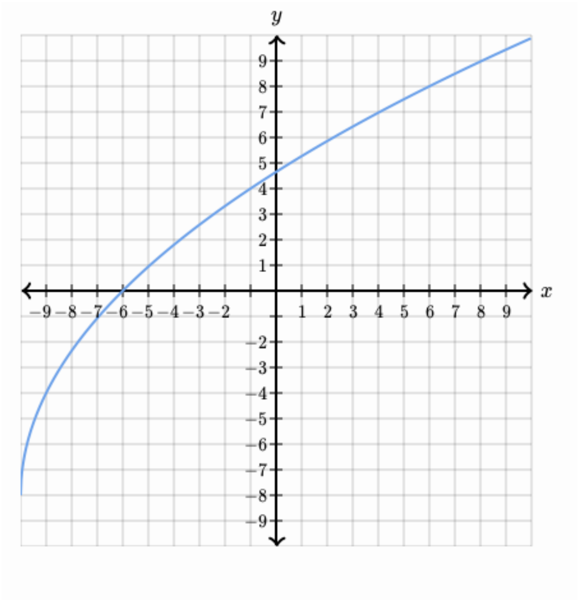
$$\Leftrightarrow \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}].$$

2. *Di un triangolo si conoscono le lunghezze $a$ e $b$ di due lati e l'ampiezza $\gamma$ dell'angolo compreso. Si determini l'area del triangolo in funzione di tali valori.*

*Sol.:* L'area del triangolo $T$ è data da "base per altezza diviso 2". In questo caso l'altezza è $b\sin\gamma$, per cui l'area richiesta è $A(T) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (notare che in un triangolo non degenere l'angolo $\gamma$ è minore di $\pi$, per cui $\sin\gamma > 0$).




3. *Sia $f\colon [-10, 10] \to \mathbf{R}$ la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura qui sotto*




*(a) Determinare se $f$ è iniettiva, spiegando perché.*
*(b) Determinare $f([0,6]) = \{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x),\ x \in [0,6]\}$, l'immagine di $[0,6]$ tramite $f$.*
*(c) Determinare l'insieme $\{x \in [-10,10] : f(x) \geq 1\}$.*
*(d) Determinare $f^{-1}([6,9])$.*

*Sol.:* (a) Ricordiamo che il grafico di $f\colon X \to Y$ è dato da

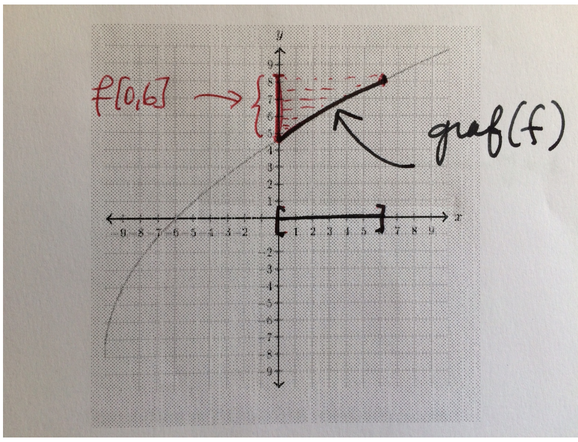
$$graf(f) = \{(x, f(x)),\ \text{al variare di } x \in X\} \subset X \times Y.$$

Nel caso della figura, ogni retta orizzontale $y = y_0$ che interseca il grafico della funzione, lo interseca una volta sola. Questo significa che sul suo dominio la funzione assume ogni valore $y_0$ una sola volta. Di conseguenza elementi distinti del dominio hanno immagini distinte, i.e. $f$ è iniettiva. Dal grafico si vede che $f$ è strettamente crescente.

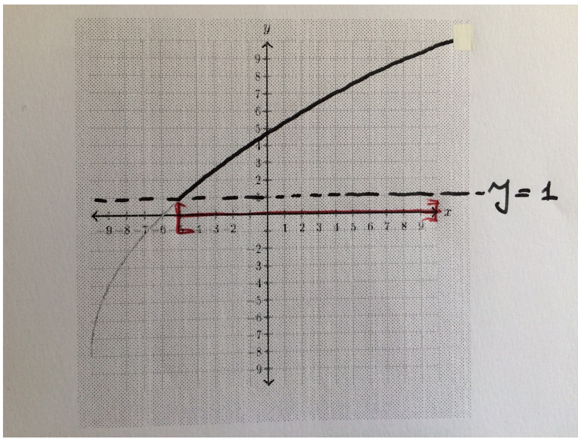
(b) L'immagine di $[0,6]$ tramite $f$ è l'insieme dei valori assunti da $f$ al variare di $x \in [0,6]$

$$f([0,6]) = \{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x),\ \text{al variare di } x \in [0,6]\}.$$

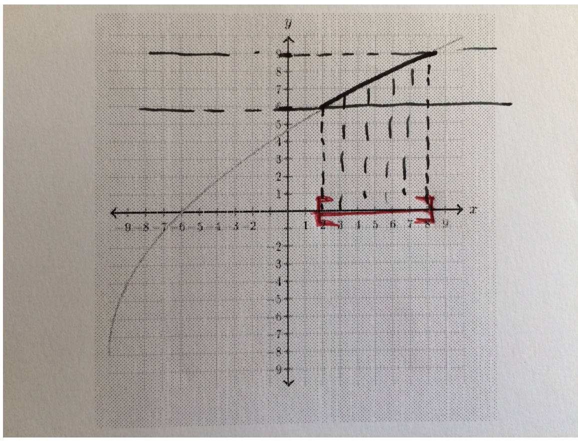
Nella figura è data dall'insieme delle ordinate dei punti del grafico con ascissa $x \in [0,6]$ ed è uguale a $[4.8, 8]$ (circa...).




(c) L'insieme $\{x \in [-10,10] : f(x) \geq 1\}$ è dato da $[-5, 10]$. Nella figura, sono le ascisse dei punti del grafico che stanno al di sopra della retta orizzontale $y = 1$.




(d) L'insieme $f^{-1}([6,9])$ è dato dagli $x \in [-10,10]$ la cui immagine tramite $f$ è compresa fra 6 e 9. Nella figura, sono le ascisse dei punti del grafico di ordinata compresa fra 6 e 9.



4. *Determinare tutti gli* $x \in \mathbf{R}$ *che soddisfano la disuguaglianza* $2^{\frac{1-x}{x}} > 2$.

*Sol.:* La disuguaglianza è ben definita per $x \neq 0$. Inoltre, poiché la funzione $2^x$ è strettamente crescente e $2^x = 2$ se e solo se $x = 1$, è equivalente alla disuguaglianza

$$\frac{1-x}{x} > 1. \qquad (*)$$

Dobbiamo distinguere due casi:

- se $x > 0$, la (*) è equivalente a $1 - x > x$. In questo caso, le soluzioni sono $\{0 < x < 1/2\}$.
- se $x < 0$, la (*) è equivalente a $1 - x < x$. In questo caso, non ci sono soluzioni.

Conclusione: le soluzioni della disequazione sono $\{0 < x < 1/2\}$.