

Laboratorio di Matematica, a.a. 2015-2016

Compito scritto, 26 gennaio 2016

- (1) Risolvere la seguente disequazione

$$e^x e^{\frac{1}{1-x}} < e^{x+1}.$$

- (2) Una formica, posta sul bordo di un tavolo, per guardare i piedi di Arcibaldo deve abbassare lo sguardo di 30 gradi, mentre per guardargli i capelli deve alzarlo di 45 gradi. Sapendo che il tavolo è alto 60 centimetri, si risponda alle seguenti domande.

i) Quanto è alto Arcibaldo?

ii) A che distanza da Arcibaldo si trova la formica?

- (3) (i) In quante maniere è possibile dividere una classe composta da 12 alunni in due squadre di pallavolo?

(ii) In quante maniere è possibile distribuire i 12 alunni in 5 aule differenti, considerando gli alunni tutti uguali?

- (4) Si consideri il polinomio $f(x) = x^6 + 7x^4 + 14x^2 + 8$.

(i) Stabilire se il polinomio $x^2 + 2$ divide $f(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$.

(ii) Decomporre $f(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$, in $\mathbb{R}[x]$ e in $\mathbb{C}[x]$.

(iii) Chi sono tutti e soli i polinomi irriducibili di $\mathbb{R}[x]$ che ammettono $2 + 3i$ come radice complessa?

- (5) (i) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r del piano euclideo $\mathbb{E}^2$ passante per i punti di coordinate $(-4, 2)$ e $(4, 4)$.

(ii) Determinare un'equazione f della parabola $\mathcal{C}$ di fuoco $(3, 3)$ e direttrice la retta di equazione $x = 1$

(iii) Sia $F : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ un isomorfismo. Dimostrare che

$$\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : f \circ F^{-1}(x, y) = 0\} = F(\mathcal{C}).$$