1. Sia data l'equazione alle differenze finite $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + n$.
   (a) Determinare se $\alpha_n = 2(-1)^n + 1$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.
   (b) Determinare se $\alpha_n = 2(-1)^n + n$ è soluzione dell'equazione data.
   (c) Determinare la soluzione dell'equazione data con le condizioni iniziali $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.

2. Sia data un'equazione omogenea alle differenze finite $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$, e supponiamo che α_n e β_n siano soluzioni.
   (a) Verificare che per ogni A, B scalari, $A\alpha_n + B\beta_n$ è soluzione.
   (b) Scrivere il sistema lineare che determina A e B imponendo le condizioni iniziali $a_0 = \alpha$ e $a_1 = \beta$.

3. Sia data l'equazione $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, & n \geq 2 \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 7. \end{cases}$
   (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione e la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali date.
   (b) Quanto vale $|a_n|$ al tendere di n all'infinito?

4. Data l'equazione $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + F_n$, scrivere la "forma generale" di una soluzione particolare per

$$F_n = n^2, \quad F_n = (-2)^n, \quad F_n = n^2 2^n, \quad F_n = 3, \quad F_n = n^2(-2)^n.$$

N.B.: Ricordiamo che se $F_n = r^n(b_0 + b_1n + b_2n^2 + \ldots + b_tn^t)$, con $r,\ b_i \in \mathbf{R}$ dati, allora la "forma generale" di una soluzione particolare è
- $r^n(p_0 + p_1n + p_2n^2 + \ldots + p_tn^t)$, per opportuni $p_i \in \mathbf{R}$, se r non è radice del polinomio caratteristico;
- $n^m r^n(p_0 + p_1n + p_2n^2 + \ldots + p_tn^t)$, per opportuni $p_i \in \mathbf{R}$, se r è radice del polinomio caratteristico di molteplicità m.

5. Per ognuna delle successioni seguenti $\{F_n\}$, determinare un'equazione alle differenze finite, lineare omogenea a coefficienti costanti E di cui F_n è soluzione:

$$F_n = n^2 + 3^n, \quad F_n = (-2)^n + 1, \quad F_n = n^2 2^n, \quad F_n = 2^n + 3^n, \quad F_n = n^2(-2)^n + (-1)^n.$$

6. Data l'equazione $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + F_n$, scrivere la "forma generale" di una soluzione particolare per

$$F_n = n^2 + 3^n, \quad F_n = (-2)^n + 1, \quad F_n = n^2 2^n, \quad F_n = 2^n + 3^n, \quad F_n = n^2(-2)^n + (-1)^n.$$

N.B.: Ricordiamo che se F_n soddisfa a sua volta una equazione alle differenze finite, lineare omogenea a coefficienti costanti E, allora si cerca una soluzione particolare dell'equazione originaria fra le soluzioni di E, ossia a partire dalla soluzione generale di E.

7. Sia $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ un'equazione alle differenze finite, lineare omogenea a coefficienti costanti il cui polinomio caratteristico ha radici complesse coniugate $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ (in questo caso $y \neq 0$).
   (a) Verificare che per ogni $A, B \in \mathbf{C}$, la successione $\alpha_n = Az^n + B\bar{z}^n$ (possibilmente complessa) è soluzione dell'equazione.
   (b) Verificare che se i valori iniziali della successione a_0 e a_1 sono reali, allora $B = \overline{A}$ e precisamente $A = \alpha + i\beta$, con $\alpha = \frac{a_0}{2}$ e $\beta = \frac{a_0x - a_1}{2y}$. In particolare, la soluzione cercata risulta

$$\alpha_n = (\frac{a_0}{2} + i\frac{a_0x - a_1}{2y})z^n + (\frac{a_0}{2} - i\frac{a_0x - a_1}{2y})\bar{z}^n = 2\mathrm{Re}(Az^n) = a_0|z|^n\cos(n\theta) + \frac{a_1 - a_0x}{y}|z|^n\sin(n\theta).$$

   (Qui $\theta = arg(z)$).
   (c) Verificare che si trova la stessa cosa, partendo dalla famiglia $\gamma_n = P|z|^n\cos(n\theta) + Q|z|^n\sin(n\theta)$, imponendo $\gamma_0 = a_0$ e $\gamma_1 = a_1$.

8. Trovare la soluzione dell'equazione $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, con condizioni iniziali $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$.
9. Trovare la soluzione dell'equazione $a_n = -a_{n-2} + 2^n$, con condizioni iniziali $a_0 = 2$ e $a_1 = 2$.
10. Trovare una relazione di ricorrenza per il determinante di A_n, matrice $n \times n$ che ha tutti 2 sulla diagonale principale, tutti 1 sulle diagonali sopra e sotto la diagonale principale, tutti zeri altrove: per esempio per $n = 3$ ed $n = 4$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Trovare una relazione di ricorrenza per il determinante di A_n, matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla diagonale che va dall'alto a destra a sinistra in basso e tutti zeri altrove: per esempio per $n = 2$ ed $n = 3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    L'equazione ottenuta è lineare a coefficienti costanti?

12. Una coppia di conigli produce due coppie di conigli dopo un mese e 6 coppie di conigli al mese, a partire dal secondo mese.
    (a) Scrivere la relazione di ricorrenza soddisfatta dal numero di coppie di conigli al "mese n".
    (b) Determinare il numero di coppie di conigli al "mese n" se si parte da una coppia, ossia $a_0 = 1$.
    (c) Dopo quanti mesi si raggiungono i cento conigli?
13. Un impiegato prende uno stipendio iniziale di 50.000 dollari all'anno. Alla fine di ogni anno il suo stipendio raddoppia ed ha inoltre un incremento di 10.000 dollari per ogni anno lavorato in precedenza.
    (a) Scrivere la relazione di ricorrenza per lo stipendio all'anno n.
    (b) Determinare lo stipendio all'inizio dell'undicesimo anno.
14. Esercizi M.A.A.:
    - Sez. 10.1: 9 – 24.
    - Sez. 10.2: 1–12, 23 – 34.
    - Sez. 10.4: 13 –18, 28.