Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Modelli e Sistemi
Esercizi per il corso di Matematica Discreta - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

FOGLIO 8 - Esercizi Riepilogativi con soluzioni

Esercizio 1: Supponiamo di avere un ecosistema che, alla settimana $n = 1$, sia costituito da

$$s_1 = 4$$

esemplari. Supponiamo inoltre che la legge di riproduzione nell'ecosistema, data in base al numero n delle settimane, sia

$$s_{n+1} = 3s_n \ \ n \in \mathbb{N}.$$

In quale settimana l'ecosistema raggiungera' il numero di esemplari pari a 324?
Svolgimento: Notiamo che il termine generale dell'equazione alle differenze finite e'

$$s_n = 4 \cdot 3^{n-1}.$$

Infatti:

$$s_1 = 4, \ s_2 = 3s_1 = 3 \cdot 4, \ s_3 = 3s_2 = 3^2 \cdot 4, \cdots .$$

Ora

$$324 = s_n \quad \Leftrightarrow \quad 324 = 4 \cdot 3^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 81 = 3^{n-1}.$$

In particolare

$$n - 1 = \log_3(81) = 4$$

quindi $n = 5$, cioe' alla quinta settimana l'ecosistema raggiunge i 324 esemplari.

Esercizio 2: Nel cuore, l'eccitazione generata da un normale **peacemaker** negli atrii passa ai ventricoli causando contrazione del cuore e l'invio di sangue agli altri organi. L'eccitazione deve passare attraverso il nodo atrio-ventricolare, che connette elettricamente atrii e ventricoli. Il problema seguente e' basato su un **modello matematico** per la conduzione atrio-ventricolare nei mammiferi. Assumiamo che i tempi (in millesimi di secondo) di conduzione atrio-ventricolare soddisfino la seguente legge di ricorrenza

$$x_{t+1} = \frac{375}{x_t - 90} + 100, \quad x_t > 90.$$

Determinarne i punti fissi e studiarne la stabilita'.

Svolgimento: La funzione generatrice e'

$$f(x) = \frac{375}{x - 90} + 100, \quad x > 90.$$

I punti fissi di $f(x)$ si determinano risolvendo $f(x) = x$, cioe'

$$\frac{375}{x-90} + 100 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 190x + 865 = 0$$

che ha soluzioni

$$x_1 = 115, \quad x_2 = 75$$

di cui solo la prima accettabile, dato che il dominio di f e' per ipotesi $(90, +\infty)$.

Calcoliamo $f'(x)$ per studiare la stabilita' del punto fisso. Si ha:

$$f'(x) = -\frac{375}{(x-90)^2}$$

e

$$f'(115) = -\frac{375}{625} = -\frac{3}{5}.$$

Dato che $|f'(115)| < 1$, il punto di equilibrio e' asintoticamente stabile.

Esercizio 3: Data l'equazione alle differenze finite

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

stabilire quali fra i seguenti interi sono soluzioni della equazione alle differenze finite e quali no:

a) n;
b) $2 + 2^n$;
c) 2^n
d) 3.

Svolgimento: L'equazione caratteristica associata e'

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

che ha soluzioni

$$t = 1,\ t = 2.$$

Quindi due soluzioni particolari sono

$$u_n = 1,\ \ v_n = 2^n.$$

In definitiva una soluzione generale e' della forma

$$x_n = c_1 + c_2 2^n,\ c_i \in \mathbb{R}.$$

Quindi tutte sono soluzioni tranne $a)$.

Esercizio 4: Scrivere la soluzione dell'equazione alle differenze finite

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0,\ \ x_0 = 0,\ x_1 = 1.$$

Svolgimento: L'equazione caratteristica e'

$$t^2 - 5t + 6 = 0,$$

che ha le due soluzioni positive $t_1 = 2$ e $t_2 = 3$. Pertanto la soluzione generale sara'

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ha:

$$0 = c_1 + c_2,\ \ 1 = 2c_1 + 3c_2.$$

Risolvendo il sistema lineare di 2 equazioni nelle due incognite c_1 e c_2, abbiamo:

$$c_1 = -1,\ \ c_2 = 1.$$

Pertanto la soluzione particolare cercata e':

$$x_n = -2^n + 3^n.$$

Esercizio 5: Calcolare i punti di equilibrio stabile per l'equazione alle differenze finite:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}),\ \ A > 0,\ n \geq 0.$$

Svolgimento: Presa $f(x) := \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$ la funzione generatrice, si ha

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Pertanto, i punti fissi di f sono soluzioni dell'equazione

$$f(x) = x,$$

cioe'

$$2x^2 = x^2 + A,$$

che sono

$$x = \pm\sqrt{A}.$$

Dato che $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{A}{x^2})$ e che $f'(\pm\sqrt{A}) = 0$, entrambi i punti sono di equilibrio localmente asintoticamente stabile.

Esercizio 6: Stabilire quale affermazioni fra le seguenti, riguardanti la successione per ricorrenza

$$s_{n+1} = s_n - 1, \; s_0 = 4, \;\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

e' vera:
a) $\{s_n\}$ converge a 4;
b) $\{s_n\}$ diverge a $-\infty$;
c) $\{s_n\}$ diverge a $+\infty$;
d) $\{s_n\}$ e' irregolare.
Svolgimento: Poiche' l'espressione del termine generale e'

$$s_n = 4 - n$$

l'unica affermazione vera e' $a)$.

Esercizio 7: Data l'equazione alle differenze finite:

$$s_{n+1} = -s_n, \; s_0 = 4, \;\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

stabilire quale tra le seguenti affermazioni e' vera:
a) $\{s_n\}$ converge a 4;
b) $\{s_n\}$ diverge a $+\infty$;
c) $\{s_n\}$ e' irregolare.
Svolgimento: Banalmente si osserva che

$$s_n = (-1)^n \cdot 4.$$

Percio' l'affermazione giusta e' la $c)$.