Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria: Elettronica

Corso di **Geometria ed Algebra**
Docente F. Flamini

Capitolo IV - §1: Operatori simmetrici e ortogonali

Definizione. *Sia $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare standard $\cdot$. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore lineare. Allora T si dice operatore* simmetrico *(o* autoaggiunto*) rispetto al prodotto scalare $\cdot$se, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:*

$$T(x) \cdot y = x \cdot T(y). \tag{1}$$

Osservazione. a) Sia A la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$. Utilizzando la (1), siccome

$$T(x) \cdot y = (Ax)^t y = x^t A^t y$$

e

$$x \cdot T(y) = x^t Ay = x^t Ay,$$

si ha che:

$$A = A^t.$$

Quindi, se $A = (a_{ij}),\ 1 \leq i, j \leq n$ allora

$$a_{ij} = a_{ji},$$

per ogni i e j. Quindi A e' una *matrice simmetrica.*
b) Poiche' ogni operatore lineare di $\mathbb{R}^n$ in se' definisce uma matrice quadrata e, viceversa, ogni matrice quadrata $n \times n$ definisce un operatore lineare di $\mathbb{R}^n$ in se', osserviamo immediatamente che allora gli operatori di $\mathbb{R}^n$ che sono simmetrici (equiv. autoaggiunti) rispetto al prodotto scalare standard sono in corrispondenza biunivoca con le matrici simmetriche $n \times n$ a coefficienti reali. Il rango della matrice A e' il *rango dell'operatore simmetrico* T, che e' ovviamente ben posta come definizione, cioe' non dipende dalla scelta della base ortonormale.

c) Ad una matrice simmetrica $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, e quindi ad un operatore simmetrico (equiv. autoaggiunto) T nella base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, si puo' associare una *forma quadratica*

$$Q(x_1, \ldots, x_n), \ \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

che e' un'applicazione $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Poiche' A e' simmetrica, i.e. $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i \neq j$, allora la forma quadratica si scrive anche

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2) + 2(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j).$$

Il *rango della forma quadratica* Q e' per definizione quello della matrice A, che e' nuovamente una definizione ben posta, cioe' non dipende dalla scelta della base ortonormale.

Viceversa, ad una forma quadratica Q di ordine n si puo' associare naturalmente una matrice simmetrica $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$.
d) NOTA BENE: Quanto osservato in a), vale perche' stiamo usando $\mathbb{R}^n$ con base canonica e prodotto scalare standard $\cdot$, cosicche' $\mathcal{E}$ e' una base ortonormale rispetto a $\cdot$. Se usassimo un altro prodotto scalare, rispetto al quale $\mathcal{E}$ ad esempio non e' ortonormale, un operatore autoaggiunto T potrebbe avere rispetto alla base $\mathcal{E}$ una matrice rappresentativa non necessariamente simmetrica.

Precisamente, pure se consideriamo il caso piu' semplice di $\mathbb{R}^n$ munito della base canonica $\mathcal{E}$, se abbiamo che $<,>$ e' un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ rispetto al quale un operatore T di $\mathbb{R}^n$ in se' e' autoaggiunto, i.e. vale

$$< T(x), y >=< x, T(y) >,$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, non e' in generale vero che la matrice rappresentativa di T rispetto ad $\mathcal{E}$ e' necessariamente una matrice simmetrica. Cio' capita solo se la base $\mathcal{E}$ e' una base ortonormale rispetto al prodotto scalare dato da $<,>$.

E' per questo motivo che per gli operatori T, la cui definizione non dipende dalla scelta di una base, si preferisce usare la nozione di operatore autoaggiunto, piuttosto che simmetrico, altrimenti si potrebbe cadere nell'errore di pensare che un operatore autoaggiunto o simmetrico e' rappresentato sempre da una matrice simmetrica, il che abbiamo gia' detto che IN GENERALE E' FALSO!

Definizione. *Sia $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare standard $\cdot$. Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore lineare. Allora F si dice operatore* ortogonale *(o* unitario*) rispetto al prodotto scalare $\cdot$se, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:*

$$F(x) \cdot F(y) = x \cdot y. \tag{2}$$

Proposizione. *Sia F un operatore lineare di $\mathbb{R}^n$ e sia B la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica. Allora, l'operatore F e' unitario se, e solo* *se, e' invertibile (i.e. esiste l'inverso F^{-1}) e*

$$B^{-1} = B^t.$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Basta verificare che $B^t B = I_n$, cioe' che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$B^t(B(x)) = x.$$

Ora, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, visto che F e' unitario, possiamo scrivere $F(x) \cdot F(y) = x^t B^t \cdot By = x \cdot y$, come voluto.
$\Leftarrow$) Sia F invertibile. la matriche di F^{-1} e' B^{-1}. Quindi, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, dalle ipotesi su F si ha:

$$x \cdot y = x^t I_n y = x^t B^{-1} By = x^t B^t By = (Bx)^t By = F(x) \cdot F(y).$$

$\square$

Osservazione. a) Dalla condizione (2),osserviamo che un operatore ortogonale conserva il prodotto scalare tra vettori. Quindi conserva la norma di un vettore e conserva l'angolo convesso tra due vettori non nulli, i.e. se F e' ortogonale

$$||F(x)|| = ||x|| \text{ ed inoltre } \theta(x, y) = \theta(F(x), F(y)),$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.
b) In particolare, un operatore ortogonale trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.
c) La matice rappresentativa di un operatore ortogonale soddisfa la condizione

$$BB^t = B^t B = I_n.$$

In tal caso B si dice *matrice ortogonale.*
d) Se F e' ortogonale, allora risulta che

$$det(B) = \pm 1.$$

Gli operatori ortogonali per cui $det(B) = +1$ sono detti *speciali ortogonali* (o anche *rotazioni*), mentre quelli per cui $det(B) = -1$ sono detti *non-speciali ortogonali* (o anche *simmetrie*).
e) Gli autovalori reali di un operatore ortogonale sono solamente $+1$ e -1. Infatti, se $F(x) = \lambda x$, per qualche $\lambda \neq 0$ e qualche $x \in \mathbb{R}^n$ non nullo, allora poiche'

$$||F(x)|| = ||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| = ||x||,$$

si ha che $|\lambda| = 1$.