**2. Rette in $\mathbf{R}^2$; circonferenze.**

In questo paragrafo studiamo le rette e le circonferenze in $\mathbf{R}^2$. Ci sono due modi per descrivere una retta in $\mathbf{R}^2$: mediante una *equazione cartesiana* oppure mediante una *equazione parametrica.*

Una *equazione cartesiana* di una retta ha la forma

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

dove $a, b, c \in \mathbf{R}$ ed $a$, $b$ non sono entrambi nulli. La retta consiste nei punti $\mathbf{x}$ le cui coordinate soddisfano l'equazione suddetta. Per esempio, per $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$ abbiamo la retta

$$r: \quad 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0.$$

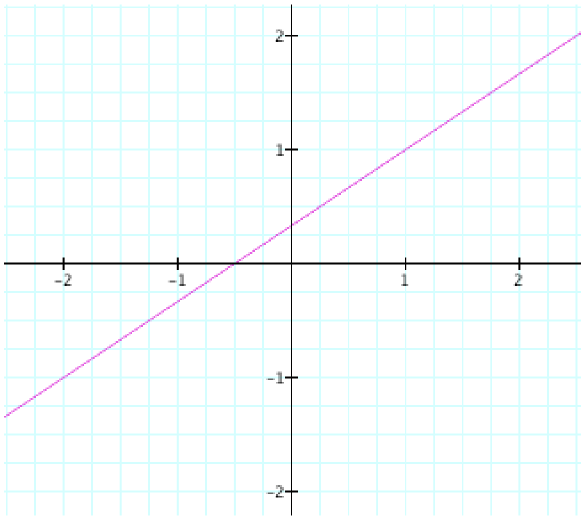


Fig.13 La retta $r: \; 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$.

Per ogni $x_1 \in \mathbf{R}$, c'è un unico punto $\mathbf{x}$ sulla retta $r$ con la prima coordinata uguale a $x_1$. L'altra coordinata di $\mathbf{x}$ è data da $x_2 = (2x_1 + 1)/3$. Per esempio, i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ stanno tutti sulla retta $r$. Nota bene che due equazioni distinte possono descrivere la stessa retta: per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ non nullo, le equazioni

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad \text{e} \quad \lambda a x_1 + \lambda b x_2 + \lambda c = 0$$

descrivono la stessa retta. Sia l'equazione $20x_1 - 30x_2 + 10 = 0$ che l'equazione $2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$ descrivono la retta $r$.

Una *equazione parametrica* di una retta ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 \\ p_2 + tv_2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

ove $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ è un punto sulla retta e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ è un vettore parallelo alla retta.

Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, il punto $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ varia fra tutti i punti della retta; il punto $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = 0$. Per $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ troviamo ad esempio la retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

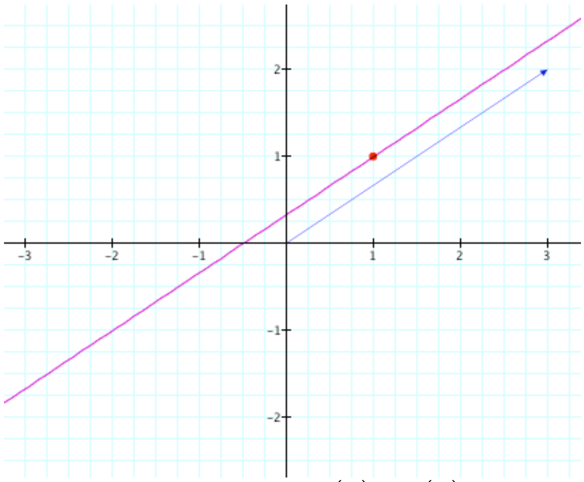


Fig.14 La retta $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Assegnando al parametro $t \in \mathbf{R}$ i valori $t = 0$, $t = 1$ e $t = -1/3$ troviamo rispettivamente i punti di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che due equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \ t \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{p}' + s\mathbf{v}', \ s \in \mathbf{R}$$

descrivono la stessa retta $l$, ogni volta che $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ sono punti di $l$ ed i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ sono paralleli ad $l$. Ciò accade precisamente quando $\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v}$ per qualche $\lambda \in \mathbf{R}$, non nullo. Per esempio, le equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

descrivono la retta $r$.

**Definizione.** Un vettore *normale* ad una retta è un vettore $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ che è perpendicolare alla retta.

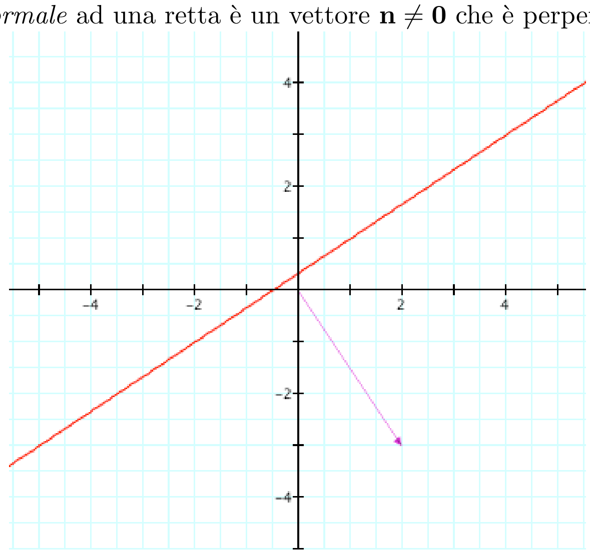


Fig.15 La retta $r: \ 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$; un vettore normale ad $r$.

**Proposizione 2.1.** *Sia $l$ la retta di equazione cartesiana*

$$ax_1 + bx_2 = c.$$

*Allora, il vettore* $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *è un vettore normale ad* $l$.

**Dimostrazione.** Notiamo che $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non è zero perchè $a, b$ non sono entrambi nulli. Verifichiamo che $\mathbf{n}$ è perpendicolare alla retta. Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due punti distinti della retta. Allora il vettore $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ è parallelo alla retta.

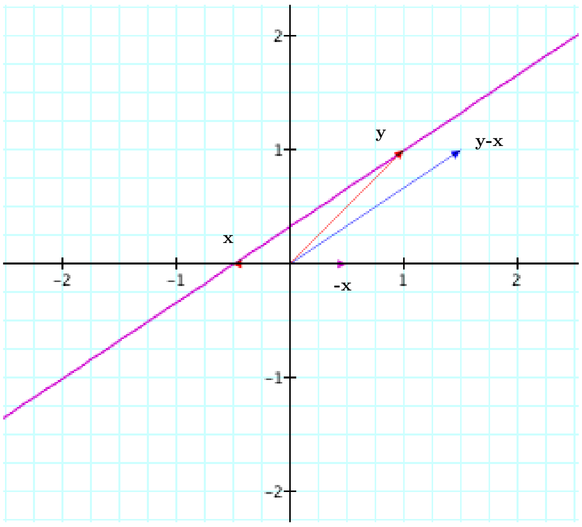


Fig.16 Il vettore $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ è parallelo alla retta.

Calcolando il prodotto scalare $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$, troviamo

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (x_1 - y_1)a + (x_2 - y_2)b \\ &= (ax_1 + bx_2) - (ay_1 + by_2) = c - c = 0. \end{aligned}$$

Dunque la retta $l$ ed il vettore $\mathbf{n}$ sono perpendicolari, come richiesto.

Dalla proposizione segue in particolare che il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ è parallelo alla retta $l$.

Negli esempi che seguono, applichiamo i concetti fin qui esposti alla risoluzione di alcuni problemi geometrici nel piano.

**Esempio 2.2.** (*La retta per due punti distinti*) Siano dati due punti distinti $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ in $\mathbf{R}^2$. Come calcolare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$? Per ottenere un'equazione parametrica di $l$, basta trovare un punto $\mathbf{p}$ su $l$ e un vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad $l$. Ad esempio, dati i punti

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

prendiamo

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così l'equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per trovare un'equazione cartesiana della retta $l$, determinamo $a,\ b,\ c$ in modo che l'equazione $ax_1+bx_2=c$ sia soddisfatta dai punti dati. Nel caso in questione, dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a+2b=c \\ -2a+4b=c. \end{cases}$$

Troviamo $a=c/4$ e $b=3c/8$, ed un'equazione cartesiana di $l$ è per esempio

$$2x_1+3x_2=8.$$

**Osservazione.** Possiamo anche ricavare un'equazione cartesiana di $l$ a partire da quella parametrica, eliminando $t$ dalle due equazioni

$$x_1=1+3t,$$
$$y_1=2-2t.$$

In questo modo, troviamo $t=(x_1-1)/3=(y_1-2)/(-2)$ e quindi $2x_1+3y_1-8=0$.

**Osservazione.** Per passare da un'equazione cartesiana ad un'equazione parametrica di una data retta, basta scegliere due punti distinti sulla retta e fare il calcolo dell'Esempio 2.2.

Date due rette in $\mathbf{R}^2$ ci sono tre possibilità: le rette si intersecano in un punto, sono parallele oppure coincidono. Per determinare quale situazione si verifichi, ci si riduce sempre a studiare un sistema di equazioni lineari. Se il sistema non ha soluzioni, le due rette sono parallele; se ha un'unica soluzione, le due rette si intersecano in un unico punto e se il sistema ammette infinite soluzioni, le due rette coincidono.

**Esempio 2.3.** (*Intersezioni fra rette*)

1. Siano $l$ e $m$ due rette di equazioni cartesiane

$$2x_1-3x_2+1=0, \qquad 4x_1-6x_2=0.$$

Per trovarne l'intersezione risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2 & =\text{-}1 \\ 4x_1-6x_2 & =0. \end{cases}$$

Vediamo che 2 volte la prima equazione meno la seconda ci da $2(2x_1-3x_2)-(4x_1-6x_2)=2\cdot-1-0$, cioè $0=-1$. Siccome questo è assurdo, il sistema non ha soluzioni e le due rette sono parallele.

2. Siano $l$ e $m$ due rette di equazioni

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbf{R}, \quad \text{e} \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ s\in\mathbf{R}.$$

Per calcolarne l'intersezione, imponiamo ad un generico punto $\mathbf{x}$ di appartenere sia ad $l$ che a $m$; cerchiamo dunque $t$ ed $s$ tali che

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3s\\1-2s\end{pmatrix}.$$

Questo ci dà un sistema di due equazioni nelle due incognite $t$ ed $s$

$$\begin{cases} 3s & =1 \\ t+2s & =\text{-}1. \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione è data da $t=-5/3$ ed $s=1/3$, corrispondente al punto in comune $\begin{pmatrix}1\\1/3\end{pmatrix}$.

3. Sia $l$ la retta di equazione cartesiana $x_1 - 3x_2 + 2 = 0$ e sia $m$ la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per trovare l'intersezione fra $l$ ed $m$, sostituiamo il generico punto di $m$, di coordinate $x_1 = 1 + 3t$ e $x_2 = 1 + t$ nell'equazione di $l$. Troviamo $(1 + 3t) - 3(1 + t) + 2 = 0$, cioè $0 = 0$. Questa equazione è dunque soddisfatta per *ogni* valore di $t$. In altre parole, tutti i punti di $m$ soddisfano l'equazione di $l$ e le due rette coincidono.

**Esempio 2.4.** (*Rette ortogonali*) Data una retta $l$ e un punto $\mathbf{q}$, come calcolare un'equazione della retta $m$ perpendicolare a $l$ e passante per $\mathbf{q}$? Per avere un'equazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ di $m$, abbiamo bisogno di un punto $\mathbf{p}$ su $m$ e di un vettore parallelo ad $m$. Poiché $m$ deve passare per $\mathbf{q}$, possiamo prendere $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ e, poiché $m$ deve essere perpendicolare ad $l$, il vettore $\mathbf{v}$ deve essere perpendicolare ad $m$.

Ad esempio, sia $l$ la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. In questo caso, prendiamo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ per $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, che è ortogonale a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e ad $l$. Un'equazione parametrica per la retta $m$ è dunque

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

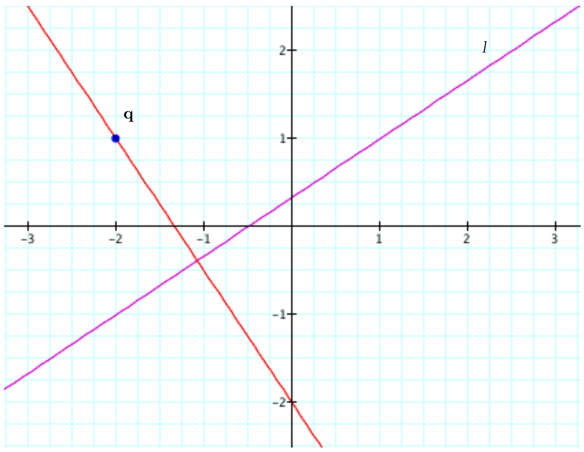

Fig.17 La retta per $\mathbf{q}$ perpendicolare ad $l$.

**Osservazione.** Se nell'Esempio 2.4 la retta $l$ fosse stata in forma cartesiana $ax_1 + bx_2 + c = 0$, sarebbe stato ancora più facile trovare un vettore $\mathbf{v}$ normale ad $l$: per la Prop.2.1, avremmo potuto prendere direttamente $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

**Esempio 2.5.** (*Distanza di un punto da una retta*) Dati una retta $l$ e un punto $\mathbf{q}$, come calcolare la distanza di $\mathbf{q}$ da $l$? Per trovare la distanza fra $\mathbf{q}$ ed $l$, calcoliamo la proiezione $\mathbf{q}'$ del punto $\mathbf{q}$ su $l$. Il punto $\mathbf{q}'$ non è altro che l'intersezione di $l$ con la retta perpendicolare ad $l$ passante per $\mathbf{q}$. La distanza di $\mathbf{q}$ da $l$ è data esattamente da

$$d(\mathbf{q}, l) = d(\mathbf{q}, \mathbf{q}').$$

Se prendiamo, ad esempio, $\mathbf{q}$ ed $l$ come nell'Esempio 2.4, il punto $\mathbf{q}'$ è dato dall'intersezione di $l$ con la retta $m$. Basta dunque calcolare questa intersezione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 1+3t & = 1+4s \\ 2+4t & = -3-3s. \end{cases}$$

La soluzione è data da $t = -4/5$ e $s = -3/5$, corrispondente al punto $\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} -7/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$; la distanza fra $\mathbf{q}$ ed $l$ è dunque

$$d(\mathbf{q}, l) = d(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \sqrt{(1+7/5)^2 + (-3+6/5)^2} = 3.$$

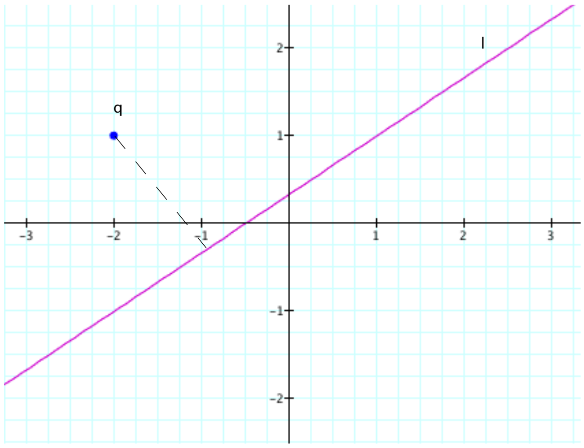


Fig.18 La distanza fra $\mathbf{q}$ ed $l$.

**Osservazione.**(*Formula della distanza punto retta*) Se la retta $l$ è data in forma cartesiana

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

un'equazione parametrica della retta $m$, perpendicolare ad $l$ e passante per $\mathbf{q}$, è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione $l \cap m$ è data dal punto

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} q_1 - a\frac{aq_1+bq_2+c}{a^2+b^2} \\ q_2 - b\frac{aq_1+bq_2+c}{a^2+b^2} \end{pmatrix},$$

corrispondente al valore del parametro

$$t = -\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2}.$$

Risulta così che la distanza di $\mathbf{q}$ da $l$ è data dalla formula

$$d(\mathbf{q}, l) = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Osservazione.** Analogamente, per calcolare la distanza fra due rette parallele, basta scegliere un punto $P$ su una delle due rette e calcolare la distanza di $P$ dall'altra retta.

**Definizione.** Una *circonferenza* in $\mathbf{R}^2$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio $r$ è l'insieme dei punti che ha distanza uguale ad $r$ da $\mathbf{c}$.

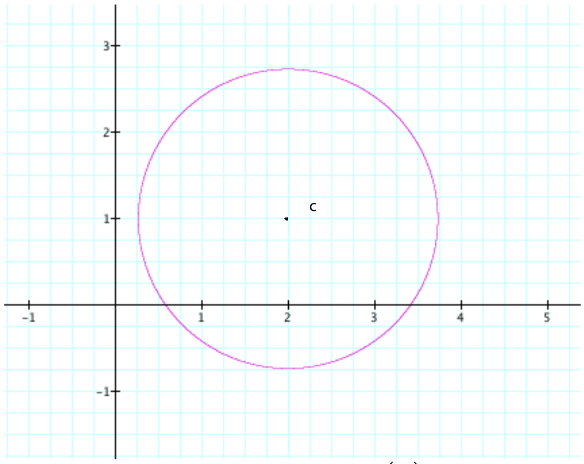


Fig.19 La circonferenza di centro $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $r = \sqrt{3}$.

Poiché i punti $\mathbf{x}$ sulla circonferenza di centro $\mathbf{c}$ e raggio $r$ sono esattamente quelli che soddisfano

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r,$$

e l'equazione della circonferenza risulta

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2.$$

Date una retta ed una circonferenza nel piano, ci sono tre possibilità: si intersecano in due punti, si intersecano in un unico punto e la retta è tangente alla circonferenza, oppure non si intersecano affatto. Se la circonferenza ha equazione $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ e la retta ha equazione $ax_1 + bx_2 = c$, si tratta di risolvere il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \\ ax_1 + bx_2 = c. \end{cases}$$

**Esempio 2.6.** (*Intersezione fra una retta e una circonferenza*) Consideriamo, ad esempio, la circonferenza $C$ di equazione

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9$$

e la retta $l$ di equazione $x_1 - x_2 + 2 = 0$. L'intersezione $C \cap l$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione la relazione $x_1 = x_2 - 2$, troviamo $x_2 = 4$ e $x_2 = 1$. I due punti di intersezione corrispondenti sono quindi

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo adesso l'intersezione di $C$ con la retta $m$ di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Sostituendo il punto generico della retta $m$ nell'equazione della circonferenza, troviamo $(-t - 2)^2 + ((t - 10) - 1)^2 = 9$, ossia l'equazione

$$t^2 - 9t + 58 = 0.$$

Poiché questa equazione non ha soluzioni reali, la circonferenza $C$ e la retta $m$ non si incontrano.

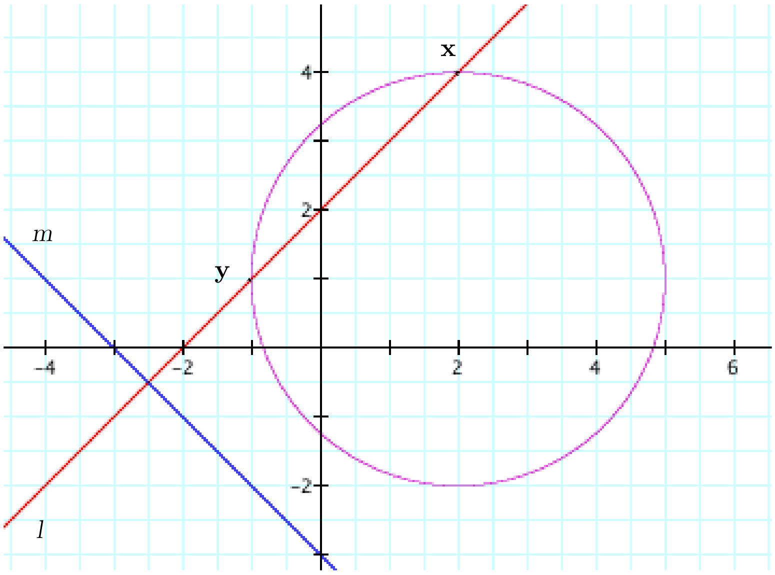


Fig.20. La circonferenza $C$ e le rette $l$ ed $m$.

**Osservazione.** (*Intersezione di due circonferenze*) Per calcolare l'intersezione di due circonferenze $C$ di equazione $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ e $C'$ di equazione $(x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2 = R^2$, bisogna risolvere il sistema non lineare

$$\begin{aligned}(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 &= r^2\\ (x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2 &= R^2.\end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che, se le circonferenze hanno lo stesso centro, o coincidono o non si incontrano mai. Supponiamo allora che le circonferenze non abbiano lo stesso centro. Sottraendo le due equazioni una dall'altra otteniamo un'equazione di primo grado

$$2(g_1 - c_1)x_1 + 2(g_2 - c_2)x_2 = r^2 - R^2 + (g_1^2 - c_1^2) + (g_2^2 - c_2^2).$$

Geometricamente, questa equazione definisce una retta $l$, perpendicolare al vettore $\mathbf{g} - \mathbf{c}$. I punti di intersezione fra le due circonferenze sono esattamente i punti di intersezione di $l$ con una di esse.

**Proposizione 2.7.** *Sia* $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ *una circonferenza* $C$ *in* $\mathbf{R}^2$ *di centro* $\mathbf{c}$ *e raggio* $r$. *Un'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto* $\mathbf{q} \in C$ *è data da*

$$(q_1 - c_1)(x_1 - q_1) + (q_2 - c_2)(x_2 - q_2) = 0.$$

**Dimostrazione.** Sia $\mathbf{x}$ un punto arbitrario su detta tangente. Poiché la tangente in $\mathbf{q}$ è perpendicolare alla retta passante per $\mathbf{q}$ ed il centro della circonferenza $\mathbf{c}$, si ha che

$$(\mathbf{q} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{x}) = 0$$

come richiesto.

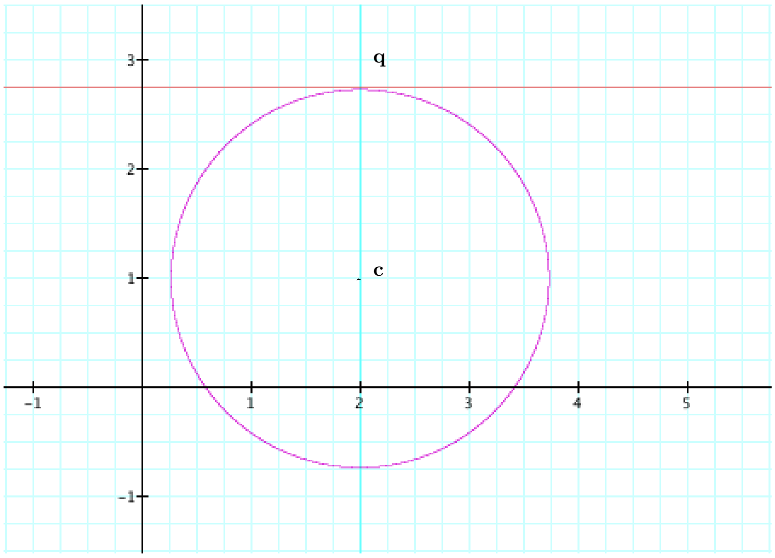


Fig.21 La retta tangente ad una circonferenza $C$ in un punto $\mathbf{q}$.

**Esempio 2.8.** (*Rette tangenti ad una circoferenza*) Siano dati una circonferenza $C$ e un punto $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2$ che non appartiene a $C$. Come calcolare le tangenti a $C$ uscenti da $\mathbf{p}$? Osserviamo innanzitutto che se $\mathbf{p}$ è interno alla circonferenza, di tangenti a $C$ uscenti da $\mathbf{p}$ non ne esistono; se invece $\mathbf{p}$ è esterno alla circonferenza, esistono esattamente due rette tangenti a $C$ uscenti da $\mathbf{p}$. Siano $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ i corrispondenti punti di tangenza. Allora $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ devono stare sulla circonferenza $C$ e al tempo stesso sulla circonferenza $C'$, di centro $\mathbf{p}$ e raggio $R = \sqrt{d(\mathbf{c},\mathbf{p})^2 - r^2}$. In altre parole, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ sono i punti di intersezione di $C \cap C'$.

Sia ad esempio $C$ la circonferenza data da

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9$$

e sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, un punto esterno a $C$. Allora le tangenti a $C$ uscenti da $\mathbf{p}$ sono le rette $r_1$, per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, ed $r_2$, per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}'$, ove $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ sono dati dall'intersezione delle circonferenze $C$ e $C'$

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9 \\ (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 5)^2 = 16. \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni una dall'altra, troviamo l'equazione della retta $l$

$$3x_1 - 4x_2 + 7 = 0$$

che incontra $C$ e $C'$ nei punti $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$. Per esempio, intersecando $l$ con $C$, troviamo

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 71/25 \\ 97/25 \end{pmatrix}.$$

Le tangenti cercate sono così

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 96/25 \\ -28/25 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbf{R}.$$

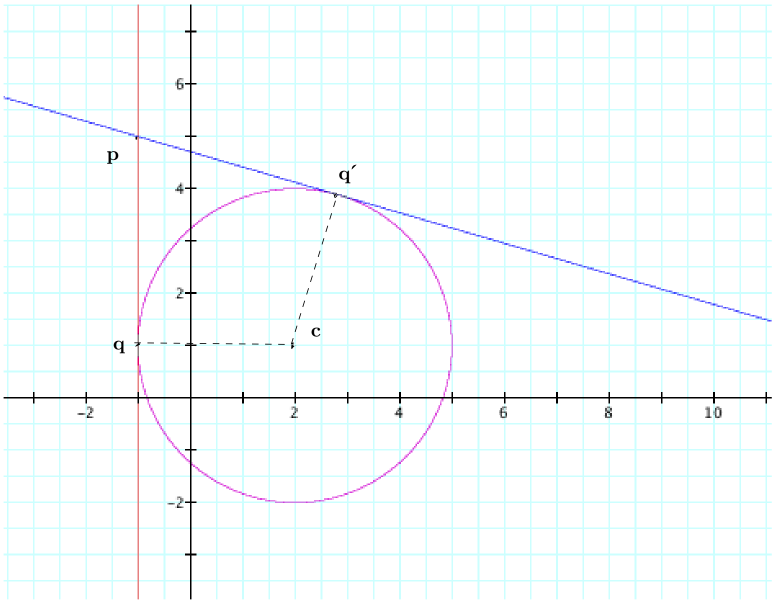


Fig.22 Le tangenti alla circonferenza $C$ uscenti da $\mathbf{p}$.

**Osservazione.** Per la Prop.2.7, la tangente a $C$ in un generico punto $\mathbf{q} \in C$ è data da

$$(q_1 - 2)(x_1 - q_1) + (q_2 - 1)(x_2 - q_2) = 0.$$

Poiché le tangenti cercate devono passare per il punto dato $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, le coordinate di $\mathbf{q}$ devono anche soddisfare la relazione

$$(q_1 - 2)(-1 - q_1) + (q_2 - 1)(5 - q_2) = 0.$$

E' facile verificare che questa non è altro che la condizione $\mathbf{q} \in C'$.

**Esercizi.**

(2.A) Sia $\mathbf{x}$ il vettore dell'Eserc.1.B: $\mathbf{x}$ ha norma $\|\mathbf{x}\| = 1$ e forma un angolo $\varphi$ con l'asse delle ascisse.

(i) Sia $\mathbf{y}$ la riflessione del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla retta $x_1 = x_2$. Far vedere che l'angolo che $\mathbf{y}$ forma con l'asse delle ascisse è uguale a $\pi/2 - \varphi$.

(ii) Dimostrare che

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \operatorname{sen} \varphi,$$
$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi.$$

(2.B) Sia $\mathbf{x}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Trovare altri tre punti sulla retta $r$ che passa per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x}$.

(2.C) Sia $T$ il triangolo di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare le coordinate dei punti medi $M_1$, $M_2$ ed $M_3$ dei lati di $T$.

(ii) Calcolare le equazioni delle tre rette $l_1, l_2, l_3$ passanti per un vertice del triangolo e per il punto medio $M_i$ ad esso opposto.

(iii) Calcolare i punti di intersezione fra le tre rette $l_1$, $l_2$ e $l_3$.

(2.D) Siano $l$ e $m$ le rette in $\mathbf{R}^2$ date dalle equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \qquad 3x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

(i) Trovare equazioni parametriche per $l$ ed $m$.
(ii) Calcolare l'intersezione di $l$ ed $m$.

(2.E) Siano $l$ e $m$ le rette in $\mathbf{R}^2$ date dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

(i) Trovare equazioni cartesiane per $l$ ed $m$.
(ii) Calcolare l'intersezione di $l$ ed $m$.

(2.F) Sia $l$ la retta in $\mathbf{R}^2$ di equazione $x_1 = 3$.
(i) Trovare un vettore normale ad $l$.
(ii) Trovare un altro vettore normale ad $l$.
(iii) Calcolare un'equazione parametrica per $l$.
(iv) Calcolare un'altra equazione parametrica per $l$.

(2.G) Sia $l$ la retta data dall'equazione $x_1 - x_2 = 7$. Sia $m$ la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare il punto di intersezione di $l$ ed $m$.

(2.H) Sia $l$ la retta di equazione $2x_1 + 2x_2 + 3 = 0$. Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare un'equazione cartesiana per la retta $m_1$ che passa per $\mathbf{p}$ ed è parallela ad $l$.
(ii) Calcolare un'equazione cartesiana per la retta $m_2$ che passa per $\mathbf{p}$ ed è ortogonale ad $l$.
(iii) Trovare il punto di intersezione di $m_1$ ed $m_2$.

(2.I) Sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e sia $l$ la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare la proiezone ortogonale del punto $\mathbf{q}$ sulla retta $l$.
(ii) Calcolare la distanza fra $\mathbf{q}$ ed $l$.

(2.J) Siano

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare equazioni cartesiane per le tre rette, passanti per due dei tre punti $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ .
(ii) Trovare vettori normali ad ognuna delle tre rette.

(2.K) Sia $C$ la circonferenza data da $x_1^2 + x_2^2 = 8$ e siano $l_1$, $l_2$ e $l_3$ le rette date da $x_1 + x_2 = 4$, da $x_1 + x_2 = 3$ e da $x_1 + x_2 = 5$. Calcolare le intersezioni $C \cap l_i$ per $i = 1, 2, 3$. Fare un disegno di $C$ e delle tre rette.

(2.L) Sia $C_1$ la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{2}$ e sia $C_2$ la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 + 4x_2 = 0.$$

Calcolare l'intersezione $C_1 \cap C_2$. Fare un disegno.

(2.M) Sia $C_1$ la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{2}$ e sia $C_2$ la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 = 20.$$

Calcolare l'intersezione $C_1 \cap C_2$. Fare un disegno.

(2.N) Sia $C$ la circonferenza data da

$$x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 + 7 = 0.$$

Calcolare le tangenti a $C$ uscenti dai punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2.O) Sia $C$ la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e raggio 37 e sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 102 \\ -97 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare il punto $\mathbf{q}_1 \in C$ più vicino a $\mathbf{p}$.

(ii) Calcolare il punto $\mathbf{q}_2 \in C$ più lontano da $\mathbf{p}$.

(iii) Calcolare la distanza fra $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$.

(2.P) Dati due punti $P$ e $Q$ in $\mathbf{R}^2$, determinare l'insieme dei punti equidistanti da $P$ e $Q$.