1. Geometria di $\mathbf{R}^2$.

In questo paragrafo discutiamo le proprietà geometriche elementari del piano. Per avere a disposizione delle *coordinate* nel piano, fissiamo un punto $\mathbf{0}$, che chiamiamo *l'origine.* Scegliamo poi due rette perpendicolari che si incontrano in $\mathbf{0}$: una retta come asse delle ascisse e l'altra come asse delle ordinate. Fissiamo su di esse un verso ed un'unità di misura. Adesso possiamo introdurre le coordinate nel solito modo: ad un arbitrario punto P del piano associamo un coppia di numeri reali $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, ove x_1 indica la proiezione di P sull'asse delle ascisse e x_2 la proiezione di P sull'asse delle ordinate.

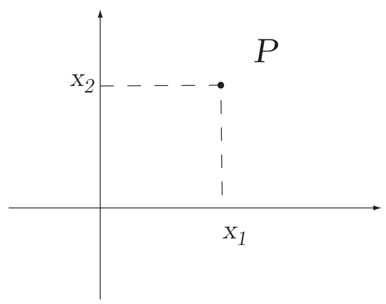

Fig.1 Il punto $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ nel piano $\mathbf{R}^2$.

Le coordinate x_1 e x_2 individuano il punto P in modo unico, così possiamo *identificare* i punti P del piano con le coppie $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Per esempio, i punti sull'asse delle ascisse sono quelli che soddisfano l'equazione $x_2 = 0$, mentre i punti sull'asse delle ordinate sono quelli che soddisfano l'equazione $x_1 = 0$. L'origine $\mathbf{0}$ è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'insieme delle coppie ordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ si chiama piano cartesiano e si indica con $\mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{R}^2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbf{R} \}.$$

In seguito, indicheremo con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ anche il *vettore* $\mathbf{x}$ uscente dall'origine e di estremo il punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Per *vettore* si intende un segmento orientato, di cui un estremo rappresenta l'inizio e l'altro la fine. Un vettore può essere raffigurato mediante una freccia. Il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, di lunghezza zero, si chiama *vettore nullo.*

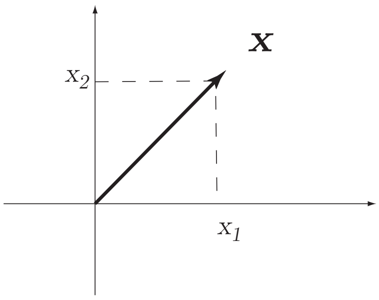

Fig.2 Il vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Sarà chiaro dal contesto se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ andrà visto come un punto del piano o come un vettore uscente da $\mathbf{0}$ di estremo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Per semplicità di notazione, scriveremo spesso $\mathbf{x}$ sottointendendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, e similmente $\mathbf{y}$ per $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, etc ... I numeri reali λ verranno anche chiamati *scalari,* per distinguerli dagli "oggetti vettoriali".

Definizione. Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^2$. Allora la *somma* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore dato da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Il *vettore opposto* del vettore $\mathbf{x}$ è il vettore

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

La *differenza* $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ dei vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$.

Definizione. Per $\lambda \in \mathbf{R}$, il *prodotto* di $\mathbf{x}$ per λ è il vettore dato da

$$\lambda\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda > 0$, il vettore $\lambda\mathbf{x}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{x}$; se $\lambda < 0$, il vettore $\lambda\mathbf{x}$ ha la stessa direzione ma verso opposto a quello di $\mathbf{x}$. Se infine $\lambda = 0$, allora $\lambda\mathbf{x}$ è il *vettore nullo* $\mathbf{0}$.

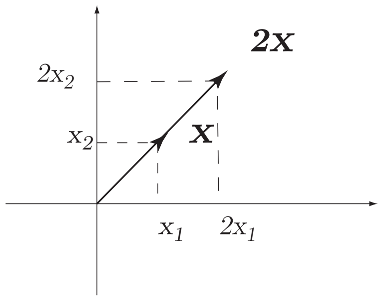

Fig.3 Il vettore $\mathbf{x}$ e il vettore $2\mathbf{x}$.

La somma di due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ha un'interpretazione geometrica: traslando il vettore $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ fino a farlo uscire dall'estremo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{x}$, si ha che il vettore risultante ha come secondo estremo il punto di coordinate $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$. Questo procedimento per trovare la somma di due vettori si chiama *regola del parallelogramma:* infatti, il vettore somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ coincide con la diagonale del parallelogramma costruito sui vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

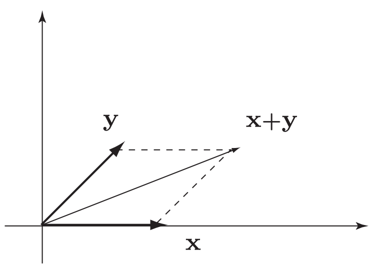

Fig.4 La somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ di due vettori con la regola del parallelogramma.

Similmente, la differenza di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si trova traslando il vettore $-\mathbf{y}$ fino a farlo uscire dall'estremo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{x}$. Nota che il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è parallelo al segmento congiungente $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ed ha la sua stessa lunghezza.

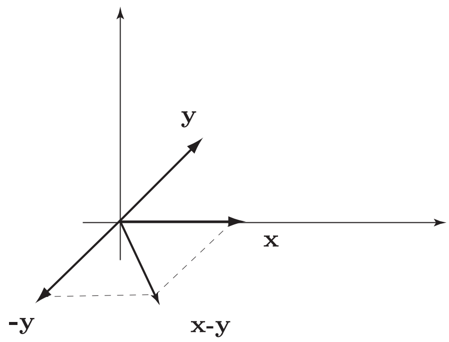

Fig.5 La differenza $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ di due vettori.

La somma fra vettori e la moltiplicazione dei vettori per gli scalari godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 1.1.
(i) (Proprietà associativa della somma) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z});$$

(ii) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x};$$

(iii) (Proprietà associativa del prodotto) Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x};$$

(iv) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y},$$
$$(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}.$$

Dimostrazione. Queste proprietà sono semplici conseguenze delle analoghe proprietà dei numeri reali.

Definizione. (*Prodotto scalare.*) Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^2$ il *prodotto scalare* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ è il numero reale dato da

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Il prodotto scalare è molto importante nello studio della geometria del piano $\mathbf{R}^2$. Esso gode delle seguenti proprietà

Proposizione 1.2.
(i) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x};$$

(ii) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z};$$

(iii) (Omogeneità) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ *ed ogni* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y});$$

(iv) (Positività) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0,$$
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \textit{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione. Il punto *(i)* segue da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Il punto *(ii)* segue da

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) = \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 z_1 + x_2 z_2 = \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Confrontando le quantità

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= \lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2, \\ (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= (\lambda x_1) y_1 + (\lambda x_2) y_2 = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2, \\ \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) &= x_1(\lambda y_1) + x_2(\lambda y_2) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2, \end{aligned}$$

otteniamo *(iii)*. Per dimostrare *(iv)*, osserviamo che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2.$$

Poiché i quadrati di numeri reali sono sempre non negativi, si ha che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$. Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, chiaramente $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$. Viceversa, se per un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ vale $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, allora $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Ciò è possibile solo se $x_1 = x_2 = 0$ e la dimostrazione della proposizione è completa.

Definizione. La norma $\|\mathbf{x}\|$ di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Per il Teorema di Pitagora, la norma del vettore $\mathbf{x}$ è uguale alla lunghezza del segmento congiungente i suoi estremi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Equivalentemente, la norma di $\mathbf{x}$ è la distanza del punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dall'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

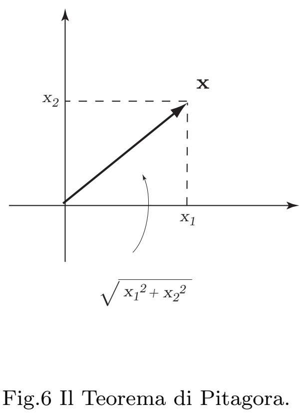

Fig.6 Il Teorema di Pitagora.

Analogamente, dalla Fig.5 vediamo che $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ è la distanza fra i punti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Usando la norma, diamo un'interpretazione geometrica del prodotto scalare fra vettori.

Proposizione 1.3. *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *due vettori in* $\mathbf{R}^2$.
(i) Allora

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\cos\varphi,$$

dove φ *è l'angolo fra i vettori* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$.
(ii) I vettori $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *sono perpendicolari se e soltanto se* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$.

Dimostrazione. Consideriamo il triangolo di vertici i punti $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

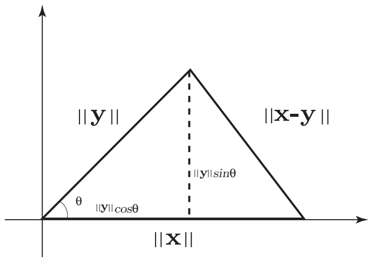

Fig.7 La regola del coseno.

Dalla Fig.7, vediamo che i lati del triangolo hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Applicando la regola del coseno (vedi Esercizi), troviamo

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\cos\varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo

$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$$

e quindi

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 = -2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$$

come richiesto. Per la parte *(ii)*, osserviamo che $\cos\varphi = 0$ se e soltanto se $\varphi = \pm\pi/2$, cioè se e soltanto se φ è un angolo retto.

Corollario 1.4. *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vettori in* $\mathbf{R}^2$. *Allora*

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|.$$

Dimostrazione. Questo segue dal fatto che $|\cos\varphi| \le 1$.

Proposizione 1.5. *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vettori in* $\mathbf{R}^2$. *Allora*
(i) (Disugualianza triangolare)

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|;$$

(ii) Per ogni $\lambda\in\mathbf{R}$

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\|.$$

Dimostrazione. Diamo due dimostrazioni del punto *(i)*. La prima è geometrica e la seconda è algebrica. Dalla Fig.4 segue che il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ ha lati di lunghezza $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ rispettivamente. È chiaro che la somma delle lunghezze di due qualunque dei lati di un triangolo è maggiore o uguale della lunghezza del terzo lato: se non fosse così, il triangolo non si "chiuderebbe". In particolare

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

come richiesto. La seconda dimostrazione usa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz del Cor.1.4. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

Poiché $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ sono numeri non negativi, possiamo estrarne le radici quadrate e ottenere la disuguaglianza triangolare.

Per la parte *(ii)*, calcoliamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\|^2 = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 = \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2.$$

Estraendo la radici quadrate, troviamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

come richiesto.

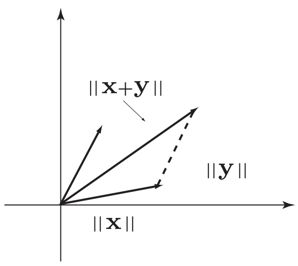

Fig.8 La disuguaglianza triangolare.

Come applicazione del prodotto scalare, determiniamo adesso la *proiezione ortogonale* di un vettore $\mathbf{x}$ su una retta l, passante per $\mathbf{0}$ e per un vettore non nullo $\mathbf{y}$.

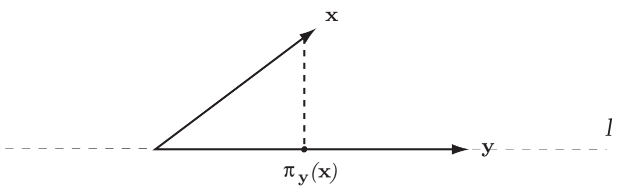

Fig.9 La proiezione del vettore $\mathbf{x}$ su l.

Proposizione 1.6. *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vettori in* $\mathbf{R}^2$. *Supponiamo che* $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. *La proiezione ortogonale* $\pi(\mathbf{x})$ *di* $\mathbf{x}$ *sulla retta passante per* $\mathbf{0}$ *e* $\mathbf{y}$ *è un multiplo* $c\mathbf{y}$ *di* $\mathbf{y}$. *Il valore dello scalare* $c \in \mathbf{R}$ *è*

$$c = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|}\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

Dimostrazione. Poiché la proiezione è ortogonale, abbiamo che

$$(\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Con la sostituzione $\pi(\mathbf{x}) = c\mathbf{y}$, troviamo

$$0 = (\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (c\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = c\|\mathbf{y}\|^2 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y},$$

da cui $c = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})/\|\mathbf{y}\|^2$ come richiesto. Poiché $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$, la costante c è anche uguale a $c = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi/\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{y}\| \cdot \cos\varphi$. Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, calcoliamo infine l'*area del triangolo* di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

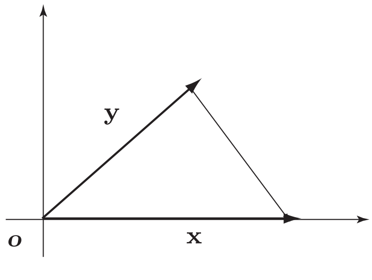

Fig.10. Il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Proposizione 1.7. *L'area del triangolo di vertici* $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *è data da*

$$\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Dimostrazione. Sia A l'area del triangolo. Poiché l'altezza del triangolo è uguale a $\|\mathbf{y}\| \operatorname{sen} \varphi$, l'area è dunque uguale a

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \operatorname{sen} \varphi.$$

Allora

$$\begin{aligned}(2A)^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.\end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate troviamo

$$2A = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

come richiesto.

Osserviamo che l'espressione $2A = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ è uguale all'area del paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

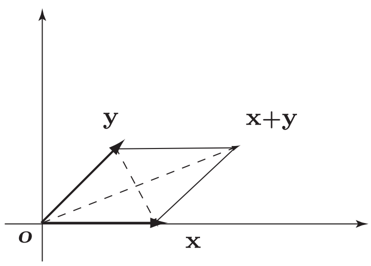

Fig.11. Il paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Osserviamo infine che l'espressione $x_1 y_2 - x_2 y_1$ è uguale al *determinante* della matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

Esercizi.

(1.A) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare e disegnare i vettori $\mathbf{x}$, $2\mathbf{x}$, $-\mathbf{x}$, $0\mathbf{x}$.
(ii) Calcolare e disegnare i vettori $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $3\mathbf{y}$, $-\mathbf{x}$ e $3\mathbf{x} - \mathbf{y}$.
(iii) Calcolare $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

(1.B) (*Trigonometria elementare)* Sia $\varphi \in \mathbf{R}$ un angolo. Il *seno* ed il *coseno* di φ sono, per definizione, le coordinate del vettore $\mathbf{x}$ di norma $\|\mathbf{x}\| = 1$, che forma un angolo φ con l'asse delle ascisse positive.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix}.$$

(i) Dimostrare che $|\operatorname{sen}\varphi| \leq 1$ e $|\cos\varphi| \leq 1$.
(ii) Dimostrare che $\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$.

(1.C) (*La regola del coseno*) Sia ABC un triangolo con lati di lunghezza a, b c ed angoli α, β e γ. Sia Q la proiezione ortogonale di C sul lato AB.
(i) Far vedere che $|CQ| = b\operatorname{sen}\alpha$ e $|AQ| = b\cos\alpha$.
(ii) Applicare il Teorema di Pitagora al triangolo CQB e dedurre la relazione
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

(1.D) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(ii) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $-\mathbf{y}$.
(iii) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $-2\mathbf{y}$.

(1.E) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Trovare un vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ tale che l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sia uguale a $\pi/3$.

(1.F) Trovare $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ non nulli tali che
(i) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
(ii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 0$.
(iii) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$.

(1.G) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ e sia $\mathbf{p}$ il vettore
$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \end{pmatrix}.$$
(i) Calcolare la distanza $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ di $\mathbf{p}$ da $\mathbf{x}$ e la distanza $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|$ di $\mathbf{p}$ da $\mathbf{y}$.
(ii) Calcolare la distanza $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Far vedere che
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$
(iii) Dedurre che $\mathbf{p}$ è il punto medio fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(1.H) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \operatorname{sen}\psi \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.
(ii) Dimostrare che
$$\cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi.$$

(1.I) Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ un vettore non nullo. Dimostrare che $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ è un vettore di norma 1.

(1.L) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(ii) Calcolare l'area del paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.
(iii) Calcolare l'area del paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

(1.M) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(1.N) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 55 \\ 89 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 144 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(ii) Trovare $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ con $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 > 1000$ tali che il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ abbia area 1.