

# Trasformazioni geometriche del piano e dello spazio.

## 1. Generalità.

Una trasformazione di  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione *bigettiva*  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Le trasformazioni si possono *comporre* tra loro: se  $f$  e  $g$  sono due applicazioni bigettive da  $\mathbb{R}^n$  ad  $\mathbb{R}^n$ , allora la composizione  $f \circ g$ , definita da

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

è ancora un'applicazione bigettiva da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^n$ . Nota bene che  $f \circ g$  si legge “ $f$  composto  $g$ ”, a indicare che prima si applica  $g$  al vettore  $\mathbf{x}$  e poi si applica  $f$  al vettore  $g(\mathbf{x})$ . In generale,  $f \circ g$  è diversa dall'applicazione  $g \circ f$ .

La composizione fra applicazioni gode della *proprietà associativa*:

$$(f \circ (g \circ h))(\mathbf{x}) = f(g(h(\mathbf{x}))) = ((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}).$$

Un'applicazione bigettiva  $f$  è invertibile. L'*inversa*  $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  soddisfa  $f^{-1}(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ , per ogni  $\mathbf{x}$  nel dominio di  $f$  e soddisfa  $f(f^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ , per ogni  $\mathbf{y}$  nel codominio di  $f$ .

Studieremo le trasformazioni del piano  $\mathbb{R}^2$  e dello spazio  $\mathbb{R}^3$  di particolare significato geometrico. Iniziamo dimostrando alcuni fatti generali sulle isometrie.

## 2. Isometrie e affinità.

Consideriamo  $\mathbb{R}^n$  con il prodotto scalare canonico e la distanza indotta.

**Definizione.** Un'applicazione  $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  è un'isometria se conserva la distanza

$$d(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Questo equivale a:  $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$

### Osservazione.

- Un'isometria è necessariamente iniettiva:

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tali che  $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$ . Questo equivale a  $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = 0$ . D'altra parte  $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  implica  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$ , da cui  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Un'isometria è anche suriettiva e dunque bigettiva (cf. Corollario A). Dunque un'isometria è una trasformazione di  $\mathbb{R}^n$ .

- La composizione  $f \circ g$  di due isometrie di  $\mathbb{R}^n$  è ancora un'isometria: infatti conserva le distanze

$$d((f \circ g)(\mathbf{x}), (f \circ g)(\mathbf{y})) = d(f(g(\mathbf{x})), f(g(\mathbf{y}))) = d(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

- L'inversa di un'isometria è un'isometria: infatti soddisfa

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f^{-1}(f(\mathbf{x})), f^{-1}(f(\mathbf{y}))).$$

**Esempio.** Le traslazioni

$$T_{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$$

( $\mathbf{p}$  è il *passo* della traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ ) sono isometrie. Infatti

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{p} - (\mathbf{y} + \mathbf{p})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

L'inversa di una traslazione di passo  $\mathbf{p}$  è una traslazione di passo  $-\mathbf{p}$

$$T_{\mathbf{p}}^{-1} = T_{-\mathbf{p}}.$$

**Lemma 2.1.** Sia  $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un'isometria con  $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Allora

- (i)  $F$  conserva la norma:  $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ , per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $F$  conserva il prodotto scalare:  $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ , per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

**Dimostrazione.** (i) Poiché  $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , in particolare per  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  vale  $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ .

(ii) Dalla relazione  $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ , otteniamo  $\|F(\mathbf{x})\|^2 + \|F(\mathbf{y})\|^2 - 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ . Per l'invarianza della norma, segue che  $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ .

**Proposizione 2.2.** Sia  $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un'isometria. Allora  $F$  è lineare (data dalla moltiplicazione matrice-vettore) se e solo se  $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

*Dim.* Se  $F$  è lineare, necessariamente  $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Viceversa, supponiamo che  $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Dobbiamo dimostrare che  $F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$  e che  $F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{x})$ , per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Poiché  $F$  conserva la norma ed il prodotto scalare, abbiamo che

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|^2 &= \|F(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 + \|F(\mathbf{x})\|^2 + \|F(\mathbf{y})\|^2 \\ &\quad + 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot F(\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\quad + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \\ &= \dots = 0. \end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\|F(\lambda\mathbf{x}) - \lambda F(\mathbf{x})\|^2 = \|F(\lambda\mathbf{x})\|^2 + \|\lambda F(\mathbf{x})\|^2 - 2\lambda \|F(\lambda\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x})\|^2 = \dots = 0,$$

e la tesi è dimostrata.

**Osservazione 2.3.** Sia  $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  un'isometria lineare (data dalla moltiplicazione matrice-vettore). Ricordiamo che un'applicazione lineare iniettiva di  $\mathbb{R}^n$  in sè è necessariamente bigettiva. Inoltre, per il lemma precedente manda basi ortonormali in basi ortonormali. Se  $M$  è la matrice rappresentativa di  $F$  (nella base canonica in dominio e codominio), le colonne di  $M$  formano una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ .

Una matrice con questa proprietà si chiama *matrice ortogonale*. Algebricamente è caratterizzata dalla condizione  ${}^tM \cdot M = Id$ .

**Esercizio 2.4.** Sia  $M$  una matrice ortogonale.

- (i) Far vedere che  $M^{-1}$  e  ${}^tM$  sono matrici ortogonali.
- (ii) Far vedere che  $\det M = \pm 1$ .
- (iii) Far vedere che se  $\lambda$  è un autovalore reale di  $M$ , allora  $\lambda = \pm 1$ .
- (iv) Far vedere che se  $V \subset \mathbb{R}^n$  è un sottospazio e  $MV = V$ , allora anche  $MV^\perp = V^\perp$ .

**Esercizio 2.5.**

- (i) Far vedere che il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale.
- (ii) Far vedere che

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

sono matrici ortogonali, per ogni  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Corollario 2.6.** Le isometrie di  $\mathbb{R}^n$  sono tutte e sole le applicazioni della forma

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove  $M$  è una matrice ortogonale e  $\mathbf{b}$  è un vettore in  $\mathbb{R}^n$ . In altre parole, tutte le isometrie di  $\mathbb{R}^n$  si ottengono dalla composizione di una traslazione con una isometria lineare.

**Dimostrazione.** Sia  $F$  un'isometria e sia  $F(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$ . La composizione  $T_{-\mathbf{b}} \circ F$  è un'isometria che manda l'origine in sè

$$T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{0}) = T_{-\mathbf{b}}(F(\mathbf{0})) = T_{-\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Per la proposizione,  $T_{-\mathbf{b}} \circ F$  è un'isometria lineare, per cui esiste una matrice ortogonale  $M$  tale che

$$T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Di conseguenza

$$F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

come richiesto.

**Definizione.** Una trasformazione lineare affine di  $\mathbb{R}^n$  è un'applicazione della forma

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove  $M$  è una matrice *invertibile* e  $\mathbf{b}$  è un vettore in  $\mathbb{R}^n$ .

Per il Corollario 2.6, le isometrie di  $\mathbb{R}^n$  sono *particolari* trasformazioni lineari affini, dette anche *trasformazioni rigide*. In generale, le trasformazioni lineari affini non conservano distanze, angoli, né volumi.

Queste trasformazioni hanno comunque diverse proprietà in comune con le trasformazioni lineari. Tutte le trasformazioni lineari di  $\mathbb{R}^n$  mandano rette in rette, piani in piani, ..., sottospazi affini in sottospazi affini (i sottospazi affini sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^n$  o traslati di sottospazi vettoriali

di  $\mathbb{R}^n$ ). Rispettano parallelismo e incidenza: mandano rette parallele in rette parallele, rette incidenti in rette incidenti, piani paralleli in piani paralleli, etc... Poiché lo stesso vale per le traslazioni, vale anche per tutte le trasformazioni lineari affini del piano, che sono composizioni di traslazioni e di trasformazioni lineari.

**Esempio.** Sia  $r$  è una retta in  $\mathbb{R}^n$  di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se  $M$  è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare di  $\mathbb{R}^n$ , la retta immagine di  $r$  tramite  $M$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, se  $\pi$  è un piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

il piano immagine di  $\pi$  tramite  $M$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v} + sM\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Infine, se  $T_{\mathbf{q}}$  è una traslazione di passo  $\mathbf{q}$  in  $\mathbb{R}^n$ , l'immagine di  $r$  tramite  $T_{\mathbf{q}}$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R};$$

l'immagine di  $\pi$  tramite  $T_{\mathbf{q}}$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Studieremo in dettaglio le trasformazioni lineari affini di  $\mathbb{R}^2$  ed  $\mathbb{R}^3$ .

## Trasformazioni geometriche di $\mathbf{R}^2$ .

### Isometrie.

In questo paragrafo studiamo le isometrie del piano  $\mathbf{R}^2$ . Iniziamo con l'introdurre alcune isometrie di particolare significato geometrico. Vedremo in seguito che ogni isometria è la composizione di un certo numero di queste isometrie "elementari".

**Definizione.** Sia  $\mathbf{p}$  un vettore di  $\mathbf{R}^2$ . La *traslazione*  $T_{\mathbf{p}}$  di passo  $\mathbf{p}$  è l'applicazione  $T_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}.$$

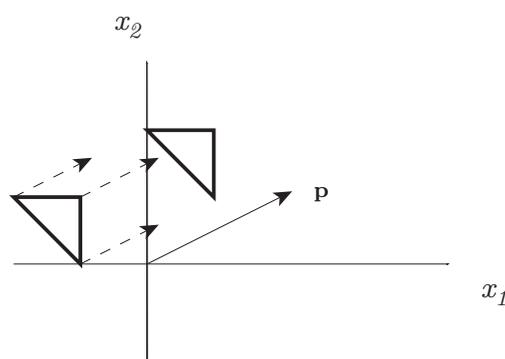


Fig.1 La traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

### Proposizione 3.1.

- (i) Siano  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$ . Allora  $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$ . In particolare, la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione.
- (ii) La traslazione  $T_{\mathbf{0}}$  è l'applicazione identica.
- (iii) La traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  è l'inversa di  $T_{\mathbf{p}}$ .

**Dimostrazione.** (i) Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ , vale

$$T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = (T_{\mathbf{p}}(T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))) = T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} + \mathbf{q}) = \mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\mathbf{x}).$$

D'altra parte, per la commutatività della somma fra vettori, vale anche

$$\mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{x} + \mathbf{q} + \mathbf{p} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}).$$

(ii) Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ , si ha che

$$T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x},$$

ossia  $T_0$  è proprio l'applicazione identità di  $\mathbf{R}^2$ .

(iii) Dal punto (i) segue che

$$T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

cioè  $T_{\mathbf{p}}$  e  $T_{-\mathbf{p}}$  sono una l'inversa dell'altra.

Introduciamo adesso la famiglia delle *rotazioni*.

**Definizione.** Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Indichiamo con  $R_\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'applicazione che ad un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  associa il vettore ottenuto da  $\mathbf{x}$  dopo la rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno all'origine. Se  $\varphi > 0$ , la rotazione va intesa in senso "antiorario". Se  $\varphi < 0$ , la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

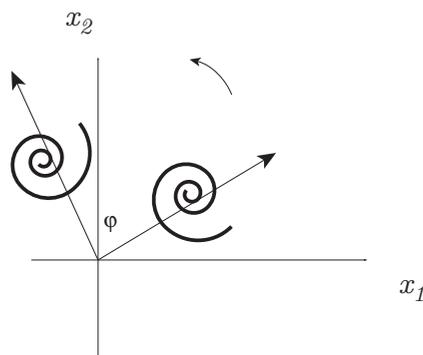


Fig.2 La rotazione  $R_\varphi$ .

**Teorema 3.2.** Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  e sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Le coordinate del punto  $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$  sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos \varphi x_1 - \sin \varphi x_2, \\ y_2 &= \sin \varphi x_1 + \cos \varphi x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\alpha$  l'angolo fra il vettore  $\mathbf{x}$  e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos \alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \sin \alpha. \end{aligned}$$

Il vettore  $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$  forma un angolo  $\varphi + \alpha$  con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos \varphi \cos \alpha - \|\mathbf{x}\| \sin \varphi \sin \alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \sin(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos \varphi \sin \alpha + \|\mathbf{x}\| \sin \varphi \cos \alpha. \end{aligned}$$

La sostituzione  $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha$  e  $x_2 = \|\mathbf{x}\| \sin \alpha$  conclude la dimostrazione.

**Esempio.** Per esempio, la rotazione  $R_{\pi/4}$  di centro  $\mathbf{0}$  e di angolo  $\varphi = \pi/4$  è l'applicazione

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Le rotazioni godono delle seguenti proprietà.

**Proposizione 3.3.**

(i) La composizione di due rotazioni  $R_\varphi$  e  $R_\psi$  intorno all'origine è una rotazione di angolo  $\varphi + \psi$ :

$$R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi} = R_\psi \circ R_\varphi.$$

(ii) La rotazione di un angolo  $\varphi = 0$  è l'applicazione identica, ossia  $R_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ .

(iii) La rotazione inversa di  $R_\varphi$  è  $R_{-\varphi}$ .

**Dimostrazione.** Tutte queste proprietà sono geometricamente evidenti, ma si possono anche ottenere dalle formule del Teorema 3.2.

Introduciamo infine le *riflessioni*.

**Definizione.** Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Indichiamo con  $S_\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'applicazione che ad un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  associa il vettore ottenuto da  $\mathbf{x}$  dopo la riflessione rispetto alla retta che passa per  $\mathbf{0}$  e forma un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse.

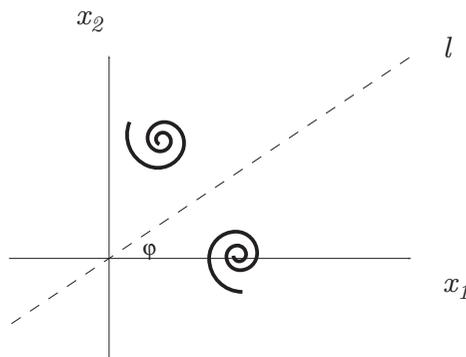


Fig.3 La riflessione  $S_\varphi$ .

**Teorema 3.4.** Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  e sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Le coordinate del punto  $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$  sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(2\varphi)x_1 + \sin(2\varphi)x_2, \\ y_2 &= \sin(2\varphi)x_1 - \cos(2\varphi)x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\alpha$  l'angolo fra il vettore  $\mathbf{x}$  e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned}x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos \alpha, \\x_2 &= \|\mathbf{x}\| \sin \alpha.\end{aligned}$$

Il vettore  $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$  forma un angolo  $2\varphi - \alpha$  con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned}y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi - \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi) \cos \alpha + \|\mathbf{x}\| \sin(2\varphi) \sin \alpha, \\y_2 &= \|\mathbf{x}\| \sin(2\varphi - \alpha) = -\|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi) \sin \alpha + \|\mathbf{x}\| \sin(2\varphi) \cos \alpha.\end{aligned}$$

La sostituzione  $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha$  e  $x_2 = \|\mathbf{x}\| \sin \alpha$  conclude la dimostrazione.

**Esempio.** Per esempio, la retta  $l$  data da  $x_1 = x_2$  forma un angolo di  $\pi/4$  con l'asse delle ascisse. La riflessione rispetto ad  $l$  è l'applicazione  $S_{\pi/4}$  data dalle formule

$$S_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

**Proposizione 3.5.**

- (i) La composizione  $S_\varphi \circ S_\varphi$  è l'applicazione identica.
- (ii) La composizione  $S_\varphi \circ S_\psi$  di due riflessioni rispetto a rette distinte passanti per  $\mathbf{0}$  (con  $\varphi \neq \psi$ ) è una rotazione di angolo  $2(\varphi - \psi)$ .

**Dimostrazione.** Calcoliamo

$$\begin{aligned}(S_\varphi \circ S_\psi)(\mathbf{x}) &= \left( \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\psi) & \sin(2\psi) \\ \sin(2\psi) & -\cos(2\psi) \end{pmatrix} \right) (\mathbf{x}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \cos(2\psi) + \sin(2\varphi) \sin(2\psi) & \cos(2\varphi) \sin(2\psi) - \sin(2\varphi) \cos(2\psi) \\ \sin(2\varphi) \cos(2\psi) - \cos(2\varphi) \sin(2\psi) & \sin(2\varphi) \sin(2\psi) + \cos(2\varphi) \cos(2\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\varphi - \psi)) & -\sin(2(\varphi - \psi)) \\ \sin(2(\varphi - \psi)) & \cos(2(\varphi - \psi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= R_{2(\varphi - \psi)}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

In particolare, se  $\varphi = \psi + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  otteniamo l'applicazione identità.

**Osservazione.** Dalle formule del teorema precedente si vede anche che, in generale,

$$S_\varphi \circ S_\psi \neq S_\psi \circ S_\varphi.$$

**Osservazione.** Se  $\varphi = 0$ , l'applicazione  $S_0$  è una riflessione rispetto all'asse delle ascisse; se  $\varphi = \pi/2$ , l'applicazione  $S_{\pi/2}$  è una riflessione rispetto all'asse delle ordinate.

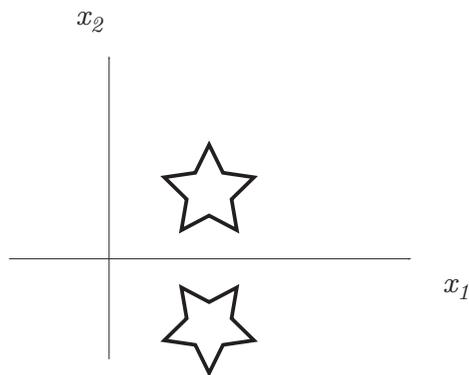


Fig.4 La riflessione rispetto all'asse delle ascisse  $S_0$ .

La composizione delle riflessioni  $S_0$  ed  $S_{\pi/2}$  è una rotazione di angolo  $\pi$ , ossia la riflessione rispetto all'origine  $\mathbf{0}$ .

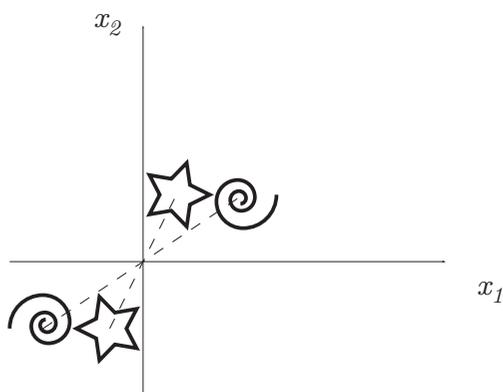


Fig.5 La riflessione rispetto all'origine  $R_\pi = S_0 \circ S_{\pi/2}$ .

**Esempio 3.6.** Come ottenere le formule di una rotazione  $R_{\varphi, \mathbf{p}}$  di angolo  $\varphi$  intorno ad un punto  $\mathbf{p}$  diverso dall'origine? Un modo di procedere è il seguente: prima si fa una traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  di passo  $-\mathbf{p}$ , che porti il punto  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{0}$ ; poi si fa una rotazione  $R_\varphi$  intorno a  $\mathbf{0}$  e poi si fa una traslazione  $T_{\mathbf{p}}$  che riporti  $\mathbf{0}$  in  $\mathbf{p}$ :

$$R_{\varphi, \mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}.$$

In coordinate

$$T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = T_{\mathbf{p}}\left(R_\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}\right)\right) = T_{\mathbf{p}}\left(\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

**Esempio.** Calcoliamo, ad esempio, le formule della rotazione  $R_{\varphi, \mathbf{p}}$  di un angolo  $\varphi$  attorno al punto  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} R_{\varphi, \mathbf{p}}(\mathbf{x}) &= T_{\mathbf{p}} \circ R_{\varphi} \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{\mathbf{p}} \circ R_{\varphi} \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \cos \varphi(x_1 - 5) - \operatorname{sen} \varphi(x_2 - 4) \\ \operatorname{sen} \varphi(x_1 - 5) + \cos \varphi(x_2 - 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi(x_1 - 5) - \operatorname{sen} \varphi(x_2 - 4) + 5 \\ \operatorname{sen} \varphi(x_1 - 5) + \cos \varphi(x_2 - 4) + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Esempio 3.7.** Come calcolare le formule della riflessione  $S$  rispetto ad una retta  $l$  che non passa per l'origine? Se la retta  $l$  non passa per l'origine, non possiamo usare direttamente le formule del Teorema 3.5, ma possiamo procedere nel seguente modo. Fissiamo un punto arbitrario  $\mathbf{p}$  sulla retta  $l$  e applichiamo la traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$ . La trasformata della retta  $l$ , tramite  $T_{-\mathbf{p}}$ , è la retta  $l'$ , parallela ad  $l$  e passante per  $\mathbf{0}$ ; applichiamo adesso la riflessione  $S_{\varphi}$  rispetto ad  $l'$ , ove  $\varphi$  è l'angolo formato da  $l'$  con l'asse delle ascisse. Applichiamo infine la traslazione inversa  $T_{\mathbf{p}}$ , che “riporta la retta  $l$  al suo posto”. In totale, la riflessione rispetto ad  $l$  è data dalla composizione

$$S = T_{\mathbf{p}} \circ S_{\varphi} \circ T_{-\mathbf{p}}$$

e non dipende dalla scelta di  $\mathbf{p} \in l$ . In coordinate

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}} \circ S_{\varphi} \circ T_{-\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= T_{\mathbf{p}}(S_{\varphi} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}) = T_{\mathbf{p}} \left( \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Esempio.** Calcoliamo ad esempio la riflessione rispetto alla retta  $l$  di equazione  $x_1 + 1 = 0$ . Il punto  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  appartiene ad  $l$  e quindi la traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  di passo  $-\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  porta  $l$  nella retta  $l'$ , ad essa parallela e passante per l'origine.  $l'$  è data dall'equazione  $x_1 = 0$  e forma un angolo uguale a  $\pi/2$  con l'asse delle ascisse. La trasformazione cercata è data dunque dalla composizione

$$S = T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

In coordinate  $S$  risulta

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Osservazione.**

• La rotazione  $R$  di un angolo  $\phi$  intorno ad un punto è lineare se e soltanto se il punto coincide con l'origine  $\mathbf{0}$ . Altrimenti,  $R_{l,\phi}$  è una applicazione lineare seguita da una traslazione. Allo stesso modo, la riflessione  $S$  rispetto ad una retta  $l$  è lineare se e soltanto se  $l$  passa per l'origine  $\mathbf{0}$ . Se  $l$  non passa per l'origine, la riflessione  $S$  è una applicazione lineare seguita da una traslazione.

• Le matrici ortogonali  $2 \times 2$  sono tutte e sole le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

Le prime sono caratterizzate dall'aver determinante uguale a 1, le seconde dall'aver determinante uguale a  $-1$ . Questo significa che le rotazioni intorno all'origine e le riflessioni rispetto a rette passanti per l'origine esauriscono tutte le *isometrie lineari* del piano  $\mathbf{R}^2$ . Per il Corollario 2.6, tutte e sole le isometrie di  $\mathbf{R}^2$  sono date dalla composizione di una traslazione con una rotazione intorno all'origine oppure dalla composizione di una traslazione con una riflessione rispetto ad una retta passante per l'origine.

• Una rotazione intorno all'origine è la composizione di due riflessioni (Proposizione 3.5 (ii)).

Si può dimostrare che ogni rotazione intorno ad un punto  $P$  è la composizione di due riflessioni rispetto a due rette incidenti in  $P$  e che una traslazione  $T_P$  è la composizione di due riflessioni rispetto a due rette parallele e ortogonali al vettore  $P$ . In generale, vale il seguente teorema.

**Teorema.** *Ogni isometria del piano è composizione di  $n$  riflessioni, con  $n \leq 3$ .*

### Trasformazioni lineari affini.

Abbiamo già osservato che le isometrie sono *particolari* trasformazioni lineari affini. Introduciamo ora *dilatazioni* e *shears*, che insieme alle trasformazioni rigide generano tutte le trasformazioni lineari affini di  $\mathbf{R}^2$ .

**Definizione.** Siano  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda, \mu > 0$ . La dilatazione  $D_{\lambda, \mu}$  di  $\mathbf{R}^2$  è l'applicazione  $D_{\lambda, \mu} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definita da

$$D_{\lambda, \mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda, \mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se  $\lambda$  e  $\mu$  sono numeri positivi distinti,  $D_{\lambda, \mu}$  è un ingrandimento di fattore  $\lambda$  nella direzione dell'asse delle ascisse e di fattore  $\mu$  nella direzione dell'asse delle ordinate. Se  $\lambda = \mu > 0$ , la dilatazione  $D_\lambda = D_{\lambda, \lambda}$  è semplicemente un "ingrandimento" di fattore  $\lambda$  e si chiama anche *omotetia*.

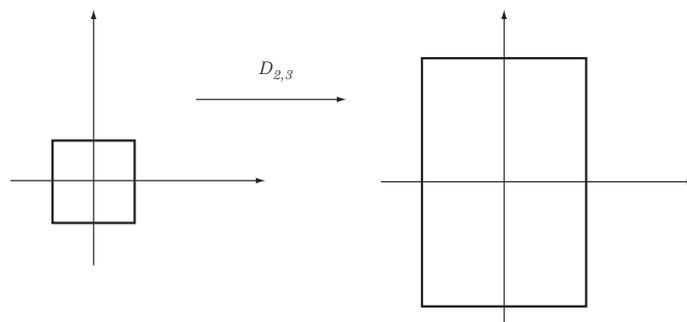


Fig.6 La dilatazione  $D_{2,3}$ .

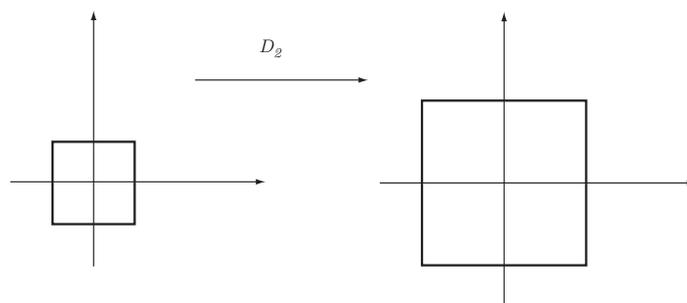


Fig.7 L'omotetia di  $D_2$ .

**Definizione.** Sia  $a \in \mathbf{R}$ . La trasformazione  $N_a : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definita da

$$N_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ax_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

si chiama *shear*. In notazione matriciale,

$$N_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

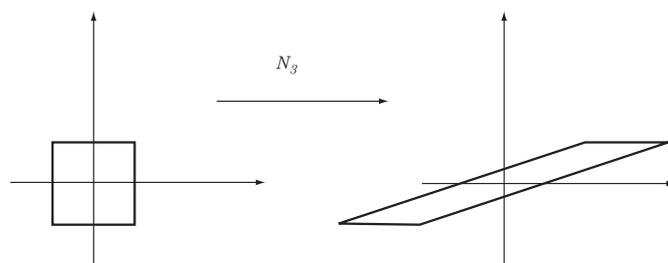


Fig.8 Lo shear  $N_3$ .

**Osservazione.** Come si vede anche dagli esempi illustrati nella Figura 6 e nella Figura 8, le dilatazioni  $D_{\lambda, \mu}$ , con  $\lambda, \mu \notin \{-1, 1\}$ ,  $\lambda \neq \mu$  e gli shears  $N_a$ , con  $a \neq 0$ , non conservano gli angoli. Gli angoli sono conservati invece, oltre che dalle isometrie, anche da tutte le omotetie  $D_\lambda$ .

**Osservazione.** Siano  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  vettori non nulli in  $\mathbf{R}^2$ . Una trasformazione lineare

$$M: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

manda il parallelogramma  $\mathcal{P}$  di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  nel parallelogramma  $\mathcal{P}'$  di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $M\mathbf{x}$ ,  $M\mathbf{y}$ . Dalle formule del volume e dalle proprietà del determinante, si ha che

$$\text{Vol}(\mathcal{P}') = |\det M| \text{Vol}(\mathcal{P}).$$

In particolare, una trasformazione lineare  $M$  conserva il volume se e solo se  $|\det M| = 1$ .

Vale il seguente risultato.

**Teorema.** Ogni matrice invertibile  $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$  si scrive come il prodotto  $M = KAN$  di una matrice ortogonale  $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$ , una matrice  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , con  $\lambda, \mu > 0$ , ed una matrice  $N = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $a \in \mathbf{R}$ .

Di conseguenza, ogni trasformazione lineare è la composizione di un'isometria lineare, una dilatazione e uno shear; analogamente ogni trasformazione lineare affine è la composizione di una traslazione, un'isometria lineare, una dilatazione e uno shear.

Concludiamo questo paragrafo introducendo l'orientazione di una coppia di vettori in  $\mathbf{R}^2$ .

**Definizione.** L'orientazione  $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  di una coppia di vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$  è il segno del determinante

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

In altre parole

$$\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} +1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 > 0; \\ 0 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0; \\ -1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 < 0. \end{cases}$$

Si dice che una coppia di vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  è orientata *positivamente* se  $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$ . Geometricamente, ciò accade se, ruotando il vettore  $\mathbf{v}$  in senso antiorario fino a sovrapporlo alla retta passante per  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{w}$ , allora  $\mathbf{v}$  ha lo stesso verso di  $\mathbf{w}$  (e non quello opposto).

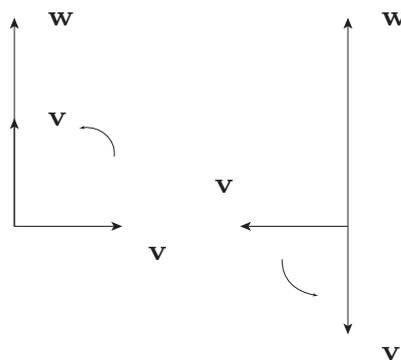


Fig.9 Orientazione.

L'orientazione  $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  *cambia* se cambia l'ordine dei vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Si ha infatti che

$$\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\text{Or}(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Siano  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ed  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Allora si ha che

$$\text{Or}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = +1, \quad \text{Or}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1.$$

Una qualunque rotazione  $R_\varphi$  conserva l'orientazione di ogni coppia di vettori. Si dice anche che le rotazioni conservano l'orientazione del piano. Una riflessione, invece, cambia l'orientazione di ogni coppia di vettori. Una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$ ,  $\lambda, \mu > 0$  conserva sempre l'orientazione:

$$\begin{aligned}\text{Or}(D_{\lambda,\mu}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu}(\mathbf{w})) &= \text{Or}\left(\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \mu w_2 \end{pmatrix}\right), \\ &= \lambda v_1 \mu w_2 - \lambda w_1 \mu v_2, \\ &= \lambda \mu \text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

In generale, un'applicazione lineare  $f$  di  $\mathbf{R}^2$  conserva l'orientazione se e soltanto se  $\det(f) > 0$ .

## Trasformazioni geometriche di $\mathbf{R}^3$ .

### Isometrie.

In questo paragrafo studiamo le isometrie dello spazio  $\mathbf{R}^3$ . Analogamente a quanto abbiamo fatto nel piano, definiamo innanzitutto l'orientazione di una terna di vettori nello spazio.

**Definizione.** L'orientazione  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  di tre vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$  è il segno del determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Si dice che  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  sono orientati *positivamente* se  $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) > 0$ .

Per esempio, i vettori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  sono orientati positivamente perchè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Scambiare due vettori cambia il segno dell'orientazione:

$$\text{Or}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Geometricamente, tre vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  sono orientati positivamente se possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano destra. Altrimenti sono orientati negativamente e possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano sinistra.

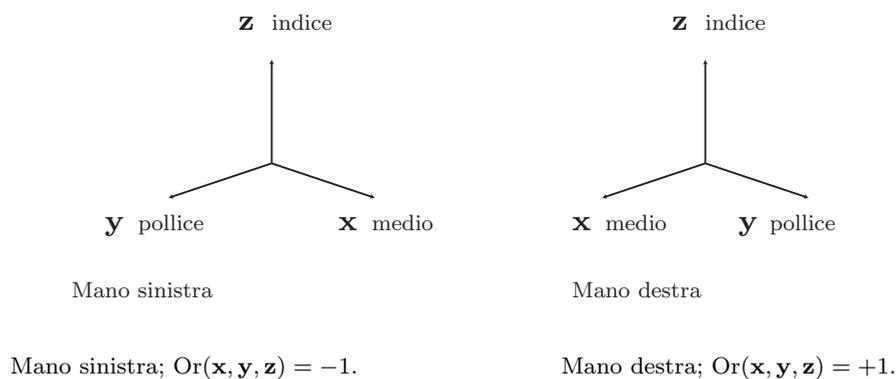


Fig.1. L'orientazione.

I vettori  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}\}$  formano una terna di vettori orientati positivamente. Osserviamo infine che l'orientazione di una terna di vettori nello spazio, determina un'orientazione nel piano ortogonale ad ognuno di essi.

Introduciamo adesso alcune isometrie di particolare significato geometrico. Vedremo in seguito che ogni isometria è la composizione di un certo numero di queste isometrie “elementari”.

**Definizione.** Sia  $\mathbf{p}$  un vettore di  $\mathbf{R}^3$ . La *traslazione*  $T_{\mathbf{p}}$  di passo  $\mathbf{p}$  è l'applicazione  $T_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \\ x_3 + p_3 \end{pmatrix}.$$

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

**Proposizione 4.1.**

- (i) Siano  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^3$ . Allora  $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$ . In particolare, la composizione di due traslazioni è una traslazione.
- (ii) La traslazione  $T_{\mathbf{0}}$  è l'applicazione identica.
- (iii) La traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  è l'inversa di  $T_{\mathbf{p}}$ , ossia  $T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}} = (T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}) = T_{\mathbf{0}}$  è l'applicazione identica.

**Dimostrazione.** La dimostrazione è simile a quella della Prop.3.1 ed è lasciata al lettore.

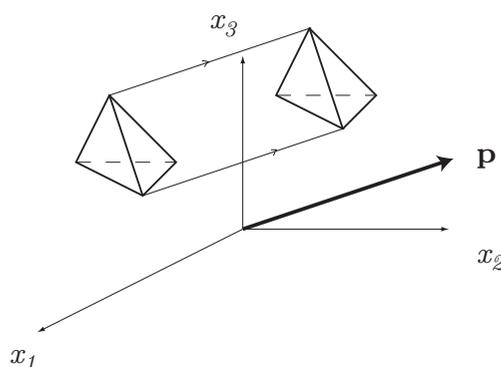


Fig.2. La traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .

Introduciamo adesso le *rotazioni* e le riflessioni in  $\mathbf{R}^3$ . La teoria è un po' più complicata di quella in  $\mathbf{R}^2$ . Cominciamo con le rotazioni e le riflessioni in forma standard e poi trattiamo il caso generale.

**Definizione.** Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Indichiamo con  $R_{\varphi} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione che ad un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$

associa il vettore  $\mathbf{x}$  ruotato di un angolo  $\varphi$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Se  $\varphi > 0$ , la rotazione

indotta sul piano  $(x_2, x_3)$  va intesa in senso antiorario. Se  $\varphi < 0$ , la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso “orario”.

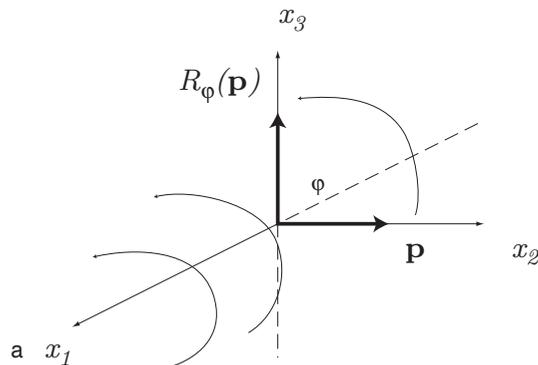


Fig.3. La rotazione  $R_\varphi$ .

**Teorema 4.2.** Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  e sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Le coordinate del punto  $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$  sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \cos(\varphi)x_2 - \text{sen}(\varphi)x_3, \\ y_3 &= \text{sen}(\varphi)x_2 + \cos(\varphi)x_3. \end{aligned}$$

In notazione matriciale

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\text{sen}(\varphi) \\ 0 & \text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Dimostrazione.** Questa formula segue dalla formula del Teorema 3.2 per la rotazione  $R_\varphi$  in  $\mathbf{R}^2$  di centro  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$  e angolo  $\varphi$ .

Per esempio, la rotazione  $R_{\pi/4}$  in  $\mathbf{R}^3$  è data da

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \end{pmatrix}.$$

**Esempio 4.3.** Come ottenere le formule della *rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno ad una retta arbitraria  $l$  che passa per  $\mathbf{0}$* ? Inanzitutto, notiamo che il problema non è ben posto se la retta non è orientata: non è chiaro infatti in quale direzione si deve fare la rotazione nel piano ortogonale ad  $l$ . Se la retta è orientata, per fissare il *senso* della rotazione parleremo di *rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno ad un vettore  $\mathbf{v}$*  con direzione e verso uguali a quelli della retta  $l$ . Un metodo naturale per ottenere le formule di una rotazione  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  di angolo  $\varphi$  intorno ad una vettore  $\mathbf{v}$  diverso da  $\mathbf{e}_1$ , è il seguente.

Sia  $\mathbf{e}'_1$  un vettore parallelo a  $\mathbf{v}$  e di lunghezza 1. Scegliamo poi due vettori  $\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in \mathbf{R}^3$  di lunghezza 1, in modo che  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  siano ortogonali fra loro ed orientati positivamente. I vettori

$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  formano in particolare una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$ . I vettori  $\mathbf{e}'_2$  e  $\mathbf{e}'_3$  con queste proprietà possono essere scelti in infiniti modi. Siano  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$  le coordinate di un generico vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ , rispetto a questa base. Per il teorema 4.2, rispetto a questa base, la rotazione è data da

$$R_{\varphi, \mathbf{v}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cos(\varphi)x'_2 - \sin(\varphi)x'_3 \\ \sin(\varphi)x'_2 + \cos(\varphi)x'_3 \end{pmatrix} = A'_\varphi \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

dove

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

è la matrice rappresentativa corrispondente. Sia  $M$  la matrice del cambiamento di base dalla base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ; le colonne di  $M$  sono i vettori della base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  espressi nella base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . La matrice rappresentativa  $A_{\varphi, \mathbf{v}}$  di  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  rispetto alla base canonica è data dunque da

$$A_{\varphi, \mathbf{v}} = MA'_{\varphi, \mathbf{v}}M^{-1}.$$

**Esempio.** Calcoliamo le formule della rotazione di un angolo  $\pi/4$  intorno al vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale per  $\mathbf{R}^3$ , orientata positivamente. La matrice rappresentativa della rotazione  $R_{\pi/4}$  rispetto alla base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  è data da

$$A'_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M$  del cambiamento di base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} \rightarrow \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è data da

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice rappresentativa  $A_{\pi/4}$  della rotazione rispetto alla base canonica è quindi data da

$$A_{\pi/4} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**Definizione.** Sia  $S : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$  la riflessione rispetto al piano di equazione  $x_3 = 0$ . Abbiamo

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

ed in forma matriciale,

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

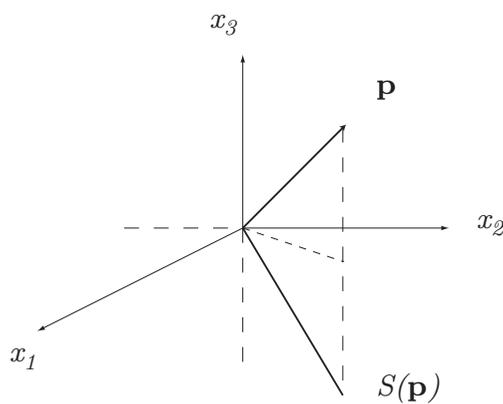


Fig.4. La riflessione  $S$  rispetto al piano  $x_3 = 0$ .

**Osservazione.** La riflessione rispetto ad una retta  $l$  è un particolare tipo di rotazione, precisamente la rotazione di un angolo di 180 gradi intorno alla retta stessa. In questo caso, il risultato non dipende dall'orientazione di  $l$ .

**Definizione.** La riflessione  $U_0$  rispetto all'origine  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$  è data dalla formula

$$U_0 \mathbf{x} = -I_3 \mathbf{x} = -\mathbf{x},$$

oppure, in notazione matriciale, da

$$U_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

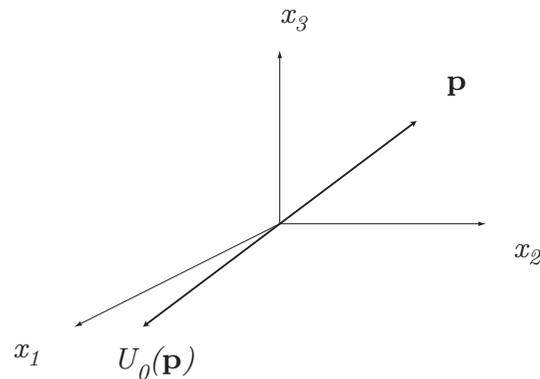


Fig.5. La riflessione  $U_0$  rispetto all'origine  $\mathbf{0}$ .

**Esempio 4.4.** Come calcolare le formule della rotazione  $R$  di un angolo  $\varphi$  rispetto ad una retta orientata  $l$  che non passa per l'origine? La strategia è di traslare la retta  $l$  nell'origine, di ruotare di un angolo  $\varphi$  intorno ad un vettore  $\mathbf{v}$  con direzione e verso uguali ad  $l$ , e di ritraslare infine la retta "dov'era".

**Esempio.** Calcoliamo ad esempio la rotazione di un angolo  $\pi/3$  rispetto alla retta  $l$  di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cominciamo con una traslazione che porta  $l$  in una retta per l'origine  $\mathbf{0}$ . Per esempio la traslazione  $T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  di passo  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  porta  $l$  nella retta  $m$ , parallela ad  $l$  e passante per l'origine. La retta  $m$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

e coincide con l'asse delle  $x_2$ . Fissiamo il vettore  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  parallelo ad  $m$  e con lo stesso verso di  $m$ . Rispetto alla base  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ , orientata positivamente, la matrice rappresentativa della rotazione  $R_{\pi/3}$  è data da

$$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$  alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa della rotazione intorno a  $\mathbf{v}$  risulta

$$R_{\pi/3, \mathbf{v}} = MR_{\pi/3}M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad  $l$  sono quindi

$$R = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} R_{\pi/3, \mathbf{v}} T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo adesso che la retta  $l$ , e quindi la retta  $m$ , abbia l'orientazione opposta. Il vettore  $\mathbf{v}' = -\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ha la direzione e il verso di  $m$ . In questo caso, la base  $\mathcal{B}'' = \{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$  è ortonormale ed orientata positivamente ed il cambiamento di base da  $\mathcal{B}''$  alla base canonica è dato dalla matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base  $\mathcal{B}''$  la matrice rappresentativa della rotazione è ancora  $R_{\pi/3}$ , ma rispetto alla base canonica troviamo adesso la matrice

$$R_{\pi/3, \mathbf{v}'} = NR_{\pi/3}N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad  $l$  risultano quindi

$$R' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Esempio 4.5.** (*riflessione rispetto ad un piano arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula per la riflessione  $S_\pi$  rispetto ad un piano arbitrario  $\pi$ . Un modo è quello di considerare un punto generico  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ , scrivere la retta  $r_{\mathbf{p}}$  che passa per  $\mathbf{p}$  ed è perpendicolare a  $\pi$ , determinare il punto di intersezione  $\mathbf{q} = r_{\mathbf{p}} \cap \pi$  e sfruttare il fatto che  $\mathbf{q}$  è il punto medio fra  $\mathbf{p}$  e  $S_\pi(\mathbf{p})$ .

**Esempio.** Sia  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$ . Sia  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$  un punto arbitrario. La retta  $r_{\mathbf{p}}$  che passa per  $\mathbf{p}$  ed è perpendicolare a  $\pi$  è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione  $r_{\mathbf{p}} \cap \pi$  è un punto  $\mathbf{q}$  che corrisponde al valore del parametro

$$t_0 = \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9}.$$

Siccome  $\mathbf{p}$  corrisponde a  $t = 0$ , il punto  $S_{\pi}(\mathbf{p})$ , simmetrico di  $\mathbf{p}$  rispetto a  $\pi$ , corrisponde a  $t = 2t_0$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} S_{\pi} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2 \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8/9 \\ -16/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

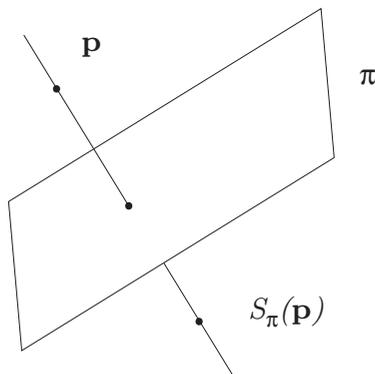


Fig.6. La riflessione  $S_{\pi}$  rispetto al piano  $\pi$ .

**Esempio 4.6.** (*riflessione rispetto ad un punto arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula della riflessione  $U_{\mathbf{p}}$  rispetto ad un punto arbitrario  $\mathbf{p}$ .

Un modo è quello di traslare il punto  $\mathbf{p}$  nell'origine  $\mathbf{0}$ , effettuare la riflessione  $U_{\mathbf{0}}$  rispetto all'origine e poi ritraslare l'origine in  $\mathbf{p}$ , ossia

$$U_{\mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{0}} \circ T_{-\mathbf{p}} \quad U_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2p_1 \\ -x_2 + 2p_2 \\ -x_3 + 2p_3 \end{pmatrix}.$$

Un altro modo è quello di osservare che il centro di riflessione  $\mathbf{p}$  è il punto medio fra un punto generico  $\mathbf{x}$  e il suo simmetrico  $U_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ . Di conseguenza,

$$\mathbf{p} = 1/2(\mathbf{x} + U_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})) \quad \text{e} \quad U_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2p_1 - x_1 \\ 2p_2 - x_2 \\ 2p_3 - x_3 \end{pmatrix}.$$

**Esempio.** Sia  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$  e sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  un punto arbitrario. Allora il punto simmetrico di  $\mathbf{x}$  rispetto a  $\mathbf{p}$  è dato da

$$U_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 - x_1 \\ -2 - x_2 \\ 4 - x_3 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione.**

- La rotazione  $R_{l,\phi}$  di un angolo  $\phi$  intorno ad una retta (orientata)  $l$  è lineare se e soltanto se  $l$  passa per l'origine  $\mathbf{0}$ . Se  $l$  non passa per l'origine,  $R_{l,\phi}$  è una applicazione lineare seguita da una traslazione. Allo stesso modo, la riflessione  $S_{\pi}$  rispetto ad un piano  $\pi$  è lineare se e soltanto se  $\pi$  passa per l'origine  $\mathbf{0}$ . Se  $\pi$  non passa per l'origine  $\mathbf{0}$ , la riflessione  $S_{\pi}$  è una applicazione lineare seguita da una traslazione. Infine la simmetria rispetto ad un punto  $\mathbf{p}$  è lineare se e soltanto se  $\mathbf{p}$  coincide con l'origine  $\mathbf{0}$ . Altrimenti è una applicazione lineare seguita da una traslazione.

- Per una matrice ortogonale  $M$ , vale  $\det M = \pm 1$ . Si può dimostrare che una matrice ortogonale  $3 \times 3$  con determinante uguale a 1 è la matrice di una rotazione intorno ad una retta (orientata) passante per l'origine, e che una matrice ortogonale  $3 \times 3$  con determinante uguale a  $-1$  è la matrice di una rotazione intorno ad una retta per l'origine seguita da una riflessione rispetto ad un piano per l'origine. Questo significa che le rotazioni intorno ad una retta per l'origine e le rotazioni intorno ad una retta per l'origine seguite da una riflessione rispetto ad un piano per l'origine esauriscono tutte le isometrie lineari di  $\mathbf{R}^3$ . Per il Corollario 2.6, tutte e sole le isometrie di  $\mathbf{R}^3$  sono date dalla composizione di una traslazione con una rotazione intorno ad una retta (orientata) per l'origine oppure da una traslazione composta con una riflessione rispetto ad un piano per l'origine composta con una rotazione intorno ad una retta (orientata) per l'origine.

Sia  $M$  una matrice ortogonale  $3 \times 3$ . Si ha che  $\det M = \pm 1$  (cfr. Esercizio 2.4(ii)). Inoltre, essendo una matrice reale di ordine dispari,  $M$  ha almeno un autovalore reale  $\lambda_0 = \pm 1$  (cfr. Esercizio 2.4(iii)).

Esaminiamo i vari casi:

(1.a) Siano  $\det M = 1$  e  $\lambda_0 = 1$ . Sia  $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  orientata positivamente, con  $\mathbf{x}_1$  autovettore di autovalore 1. In questa base, la matrice dell'isometria definita da  $M$  è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

dove  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  è una matrice ortogonale  $2 \times 2$  con determinante uguale a 1. Ne segue che  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  ed  $M$  rappresenta la rotazione di un angolo  $\theta$  intorno al vettore  $\mathbf{x}_1$ .

(1.b) Siano  $\det M = 1$  e  $\lambda_0 = -1$ . Sia  $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  orientata positivamente, con  $\mathbf{x}_1$  autovettore di autovalore  $-1$ . In questa base, la matrice dell'isometria definita da  $M$  è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

dove  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  è una matrice ortogonale  $2 \times 2$  con determinante uguale a  $-1$ . Ne segue che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

e che i rimanenti autovalori di  $M$  sono  $\mu = 1$ ,  $\nu = -1$ . Se nella base  $\mathcal{B}$  i vettori  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  sono autovettori di autovalore  $-1$  e  $\mathbf{x}_3$  è autovettore di autovalore  $1$ , la matrice dell'isometria definita da  $M$  è precisamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

In questo caso,  $M$  rappresenta la rotazione di un angolo  $\theta = \pi$  intorno al vettore  $\mathbf{x}_3$ . La discussione dei punti (1.a) e (1.b) dimostra quindi che una matrice ortogonale con determinante uguale a  $1$  rappresenta una rotazione.

(2) Se  $\det M = -1$ , scriviamo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot M, \quad \det \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot M \right) = 1.$$

Ricordiamo che la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  rappresenta la simmetria rispetto al piano  $(x_1, x_2)$ . Questo fatto insieme alla discussione dei punti (1.a) e (1.b) dimostra che una matrice ortogonale con determinante uguale a  $-1$  rappresenta la composizione di una simmetria con una rotazione.

- Analogamente al caso delle isometrie del piano, vale il seguente teorema per le isometrie dello spazio

**Teorema.** *Ogni isometria dello spazio è composizione di  $n$  riflessioni (rispetto a piani), con  $n \leq 4$ .*

### Trasformazioni lineari affini.

Abbiamo già osservato che le isometrie sono *particolari* trasformazioni lineari affini. Introduciamo ora *dilatazioni* e *shears*, che insieme alle trasformazioni rigide generano tutte le trasformazioni lineari affini di  $\mathbf{R}^3$ .

**Definizione.** Siano  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda, \mu, \nu > 0$ . La dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \nu}$  di  $\mathbf{R}^3$  è l'applicazione  $D_{\lambda, \mu, \nu} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da

$$D_{\lambda, \mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \\ \nu x_3 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda, \mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

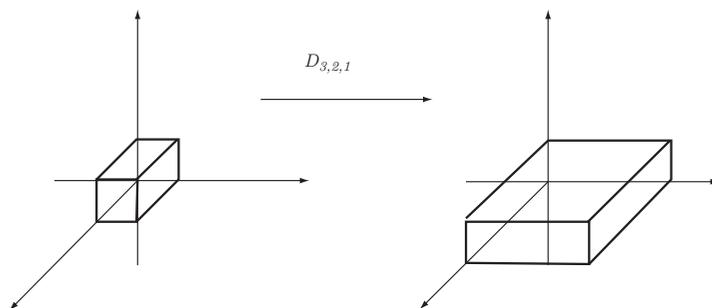


Fig.7 La dilatazione  $D_{2,3,1}$ .

Se  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  sono numeri positivi distinti,  $D_{\lambda, \mu, \nu}$  è un ingrandimento di fattore  $\lambda$  nella direzione dell'asse delle  $x_1$ , di fattore  $\mu$  nella direzione dell'asse  $x_2$  e di fattore  $\nu$  nella direzione dell'asse  $x_3$ . Se  $\lambda = \mu = \nu > 0$ , la dilatazione  $D_\lambda = D_{\lambda, \lambda, \lambda}$  è semplicemente un "ingrandimento" di fattore  $\lambda$  e si chiama anche *omotetia*.

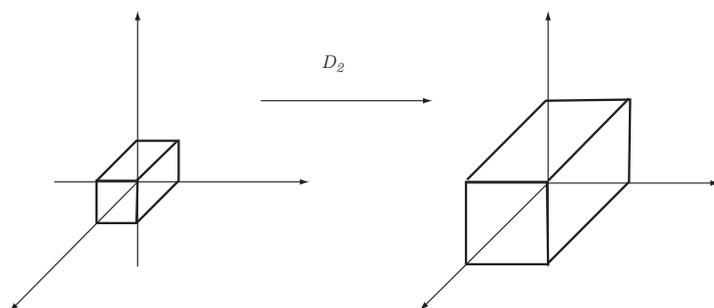


Fig.8 L'omotetia di  $D_2$ .

**Definizione.** Siano  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . La trasformazione  $N_{a,b,c} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da

$$N_{a,b,c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ax_2 + bx_3 \\ x_2 + cx_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

si chiama shear. In notazione matriciale,

$$N_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

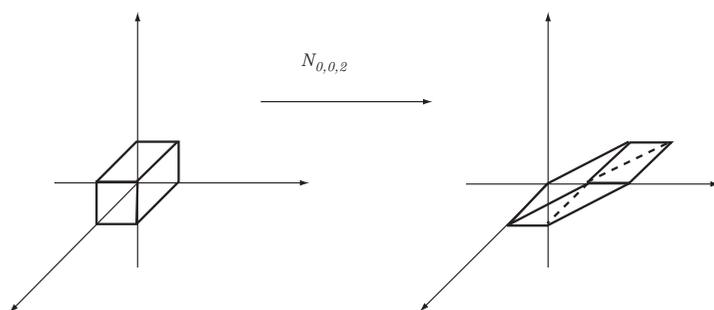


Fig.9 Lo shear  $N_{0,0,2}$ .

**Osservazione.** Come si vede anche dagli esempi illustrati nella Figura 7 e nella Figura 9, le dilatazioni  $D_{\lambda,\mu,\nu}$ , con  $\lambda, \mu, \nu \notin \{-1, 1\}$ ,  $\lambda, \mu, \nu$  distinti, e gli shears  $N_{a,b,c}$ , con  $a, b, c$  non tutti nulli,

non conservano gli angoli. Gli angoli sono conservati invece, oltre che dalle isometrie, anche da tutte le omotetie  $D_\lambda$ .

**Osservazione.** Siano  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  vettori non nulli in  $\mathbf{R}^3$ . Una trasformazione lineare

$$M: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

manda il parallelogramma  $\mathcal{P}$  di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  nel parallelogramma  $\mathcal{P}'$  di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $M\mathbf{x}$ ,  $M\mathbf{y}$ ,  $M\mathbf{z}$ . Dalle formule del volume e dalle proprietà del determinante, si ha che

$$\text{Vol}(\mathcal{P}') = |\det M| \text{Vol}(\mathcal{P}).$$

In particolare, una trasformazione lineare  $M$  conserva il volume se e solo se  $|\det M| = 1$ .

Vale il seguente risultato.

**Teorema.** Ogni matrice invertibile  $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix}$  si scrive come il prodotto  $M = KAN$

di una matrice ortogonale  $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{pmatrix}$ , una matrice  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ , con  $\lambda, \mu, \nu > 0$ ,

ed una matrice  $N = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

Di conseguenza, ogni trasformazione lineare è la composizione di un'isometria lineare, una dilatazione e uno shear; analogamente ogni trasformazione lineare affine è la composizione di una traslazione, un'isometria lineare, una dilatazione e uno shear.

**Osservazione.** Per concludere osserviamo che, in generale, una trasformazione lineare  $f$  di  $\mathbf{R}^3$  conserva l'orientazione se e soltanto se  $\det(f) > 0$ . In particolare, dilatazioni e shears conservano l'orientazione. Le rotazioni  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  conservano l'orientazione poiché le loro matrici rappresentative hanno sempre determinante uguale a 1. Le riflessioni  $S$  ed  $U$  invece cambiano l'orientazione poiché le loro matrici rappresentative hanno determinante uguale a  $-1$ .