1. Sia dato il sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} x - y + 3z - 2w = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z - w = 4. \end{cases}$$

   (i) Determinare la soluzione generale.
   (ii) Dire se si tratta di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x + 2y - w = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}\}.$$

   (i) Determinare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $U \cap W$ di $\mathbb{R}^4$.
   (ii) Determinare $U \cap W$ ed esibirne una base.
   (iii) Determinare $\dim(U + W)$.

3. Sia $M(2, 2, \mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} |a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale delle matrici $2 \times 2$ a coefficienti reali.
   (i) Esibire una base di $M(2, 2, \mathbb{R})$ e determinare $\dim M(2, 2, \mathbb{R})$.
   (ii) Dire se $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti in $M(2, 2, \mathbb{R})$.
   (iii) Far vedere che $U = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} |a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, \mathbb{R})$.
   (iv) Esibire una base di $U$ e determinare $\dim U$.
   (v) Determinare se $V = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 2 & a_{11} \end{pmatrix} |a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, \mathbb{R})$.
   (vi) Determinare se $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartengono a $U$ o a $V$.

4. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Calcolare le coordinate dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ nella base $\mathcal{B}$.

5. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Calcolare le coordinate dei vettori

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

   nelle basi

$$\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

6. Calcolare le coordinate dei vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ nella base

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

7. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare se sono linearmente indipendenti usando la definizione.
(ii) Determinare la dimensione del sottospazio che generano ed esibirne una base.

8. Costruire due matrici $A$, $B$ $3 \times 2$, tali che il sistema lineare omogeneo associato ad $A$ abbia il vettore nullo come unica soluzione, mentre il sistema lineare omogeneo associato a $B$ abbia solozioni non banali.

9. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare se i sottoinsiemi

$$\{u, v\}, \quad \{u, w\}, \quad \{u, z\}, \quad \{v, w\}, \quad \{v, z\}, \quad \{w, z\}$$

sono tutti linearmente indipendenti.
(ii) Se si, questo implica che $\{u, v, w, z\}$ sono linearmente indipendenti?

10. Siano dati 3 vettori in $\mathbb{R}^5$. Spiegare perché non possono essere una base di $\mathbb{R}^5$.

11. Siano dati 6 vettori in $\mathbb{R}^5$. Spiegare perché non possono essere una base di $\mathbb{R}^5$.