1. Apostol: Sezione 1.15, Esercizi 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15.

2. Decidere se i seguenti insiemi di vettori sono indipendenti o meno.

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^3;$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^5;$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^3;$$

(iv)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbf{R}^2.$$

3. Siano u, v, w, p vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^4$. Determinare quali delle seguenti terne di vettori sono linearmente indipendenti:

$$\{u, u+v, u+p\} \qquad \{u-w, w, 4w\} \qquad \{u+v, u+p, w+p\}.$$

4. Sia

$$U = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad \text{in } \mathbf{R}^5.$$

(i) Determinare un insieme di generatori lineramente indipendenti di U;

(ii) Determinare se

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U.$$

5. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

(i) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.

(ii) Determinare $\mathbf{v}_3 \in \mathbf{R}^3$ cosí che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ siano lineramente indipendenti.

(iii) Esprimere i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.