1. "Sperimentando" con vari vettori X determinare il segno delle seguenti forme quadratiche

$$q(x_1,x_2)=3x_1^2-8x_1x_2-3x_2^2,\quad q(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2,\quad q(x_1,x_2)=6x_1x_2.$$

$$q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_3,\quad q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+2x_1x_2+2x_2x_3,\quad q(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2-8x_1x_2+5x_2^2.$$

2. Siano date le forme quadratiche $q\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$

$$q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2,\quad q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_3-x_2^2+x_3^2$$

$$q(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3-2x_3^2,\quad q(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+2x_2^2.$$

Per ognuna di esse:
(a) Scrivere la matrice simmetrica associata, determinare la forma canonica metrica e determinare un cambiamento di coordinate che la realizza (ossia, un cambiamento di base ortogonale $X=AY$ in modo che nelle coordinate Y la forma non abbia termini misti).
(b) Determinare la forma canonica affine e determinare un cambiamento di coordinate che la realizza (ossia, un cambiamento di base $X=AZ$ in modo che nelle coordinate Z la forma non abbia termini misti e i coefficienti dei termini rimanenti siano uguali a ±1).

3. Sia $Q(X)={}^tXMX$ una forma quadratica, dove M è una matrice simmetrica $n\times n$.
(i) Verificare che se X_0 è un autovettore di M di autovalore λ, allora $Q(X_0)=\lambda\|X_0\|^2$.
(ii) Sia $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di M e siano $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ i rispettivi autovalori. Verificare che se un vettore X_0 è dato da $X_0=a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_n\mathbf{v}_n$, allora

$$Q(X_0)=\lambda_1a_1^2+\ldots+\lambda_na_n^2.$$

4. Sia dato il cambiamento di coordinate del piano $X=T_{\binom{2}{3}}Y$, dove $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ e $T_{\binom{2}{3}}$ indica la traslazione di passo $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
(a) Determinare le coordinate dei punti $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ e $P=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ nel sistema di coordinate (y_1,y_2).
(b) Determinare le equazioni delle rette $x_2=0$ e $x_1=0$ nel sistema di coordinate (y_1,y_2).
(c) Determinare l'equazione della conica $x_1^2-x_2^2=1$ nel sistema di coordinate (y_1,y_2).
(d) Determinare l'equazione della conica $x_1^2=x_2^2$ nel sistema di coordinate (y_1,y_2).
(e) Fare un disegno dei vari oggetti.

5. Sia dato il cambiamento di coordinate del piano $X=T_{\binom{2}{3}}Y$, dove $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ e $T_{\binom{2}{3}}$ indica la traslazione di passo $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
(a) Nel sistema di coordinate (y_1,y_2), siano dati i punti $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ e $Q=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Determinare le loro coordinate nel sistema (x_1,x_2).
(b) Determinare le equazioni delle rette $y_2=0$ e $y_1=0$ nel sistema di coordinate (x_1,x_2).
(c) Determinare l'equazione della conica $y_1^2-y_2^2+2y_1y_2=0$ nel sistema di coordinate (x_1,x_2).

6. Sia dato il cambiamento di coordinate del piano $X=R_{-\pi/4}Y$, dove $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ e $R_{-\pi/4}$ indica la rotazione di un angolo $-\pi/4$ intorno all'origine.

(a) Determinare le coordinate dei punti $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ nel sistema di coordinate (y_1, y_2).
(b) Determinare le equazioni delle rette $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$ nel sistema di coordinate (y_1, y_2).
(c) Determinare l'equazione della conica $x_1^2 - x_2^2 = 1$ nel sistema di coordinate (y_1, y_2).
(d) Determinare l'equazione della conica $x_1^2 = x_2^2$ nel sistema di coordinate (y_1, y_2).
(e) Fare un disegno dei vari oggetti.

7. Sia dato il cambiamento di coordinate del piano $X = R_{-\pi/4}Y$, dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ e $R_{-\pi/4}$ indica la rotazione di un angolo $-\pi/4$ intorno all'origine.
   (a) Nel sistema di coordinate (y_1, y_2), siano dati i punti $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare le loro coordinate nel sistema (x_1, x_2).
   (b) Determinare le equazioni delle rette $y_2 = 0$ e $y_1 = 0$ nel sistema di coordinate (x_1, x_2).
   (c) Determinare l'equazione della conica $y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 = 0$ nel sistema di coordinate (x_1, x_2).

8. Dispense 10, Coniche: esercizi di fine capitolo.

9. Dispense 11, Quadriche: esercizi di fine capitolo n. 8.A, 8.B, 8.C.

10. Disegnare le seguenti quadriche in $\mathbf{R}^3$ e dire di che cosa si tratta:
   $x_1^2 + x_2^2 = 1$;
   $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^3 = 1$;
   $2x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^3 = 1$;
   $2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^3 = 0$;
   $2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^3 = 1$;
   $x_2^2 = x_3$.