1 Sia data l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Cosa fa geometricamente $F$?
(b) Determinare gli autovalori di $F$.
(c) Verificare che $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $F$.
(d) Determinare altre due basi di $\mathbf{R}^3$ formate da autovettori di $F$.

2 Sia data l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Cosa fa geometricamente $F$?
(b) Determinare gli autovalori di $F$.
(c) Verificare che $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $F$.
(d) Determinare altre due basi di $\mathbf{R}^3$ formate da autovettori di $F$.

3 Sia data l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Cosa fa geometricamente $F$?
(b) Determinare gli autovalori di $F$.
(c) Verificare che $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $F$.
(d) Determinare altre due basi di $\mathbf{R}^3$ formate da autovettori di $F$.

4 Sia data l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Cosa fa geometricamente $F$?
(b) Determinare autovalori e autospazi di $F$.

(c) Verificare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di $F$.

(d) Determinare altre due basi di $\mathbf{R}^3$ formate da autovettori di $F$.

5 Sia data l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare autovalori e autospazi di $F$.
(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di $F$.
(c) Dire se $F$ è o meno diagonalizzabile.
(d) Dire se $F$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

6. Sia data l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare autovalori e autospazi di $F$.
(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di $F$.
(c) Dire se $F$ è o meno diagonalizzabile.
(d) Dire se $F$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

7. Sia data l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare autovalori e autospazi di $F$.
(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti di $F$.
(c) Dire se $F$ è o meno diagonalizzabile.
(d) Dire se $F$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

8. Sia data un'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettori di autovalori $\lambda = 2, 0, -1$, rispettivamente.

(a) Calcolare $F(3\mathbf{v}_1)$ ed $F(\mathbf{v}_2)$.
(b) Determinare la matrice rappresentativa di $F$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ in dominio e codominio.
(c) Determinare la matrice rappresentativa di $F$ rispetto alla base canonica in dominio e codominio.
(d) Dire se $F$ è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

9. Sia data l'applicazione lineare

$$F\colon R^4 \to \mathbf{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è sutovettore di $F$. Di quale autovalore?

(b) Verificare che $\lambda = 0$ è autovalore di $F$. Determinare l'autospazio corrispondente.

(b) Determinare una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di $F$.

10. Determinare quali delle seguenti matrici sono invertibili e calcolare le loro inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$