

- 1.a Determinare la matrice del cambiamento di base in \mathbf{R}^2 dalla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ alla base canonica.
- (b) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ (ossia un vettore che ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base \mathcal{B}). Determinare le coordinate di \mathbf{v} nella base canonica usando la definizione.
- (c) Determinare le coordinate di \mathbf{v} nella base canonica usando la matrice del cambiamento di base trovata in (a).
- (d) Determinare l'inversa della matrice del cambiamento di base trovata in (a). Che cosa rappresenta?
- 2.a Determinare la matrice del cambiamento di base in \mathbf{R}^2 dalla base canonica alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
- (b) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ossia un vettore che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica). Determinare le coordinate di \mathbf{v} nella base \mathcal{B} usando la definizione.
- (c) Determinare le coordinate di \mathbf{v} nella base \mathcal{B} usando la matrice del cambiamento di base trovata in (a).
- (d) Determinare l'inversa della matrice del cambiamento di base trovata in (a). Che cosa rappresenta?
- 3.a Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base di \mathbf{R}^2 . Sia F un'applicazione lineare tale che $F(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1$ e $F(\mathbf{v}_2) = 5\mathbf{v}_2$.
- (b) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base \mathcal{B} in dominio e codominio.
- (c) Determinare se F è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
4. Sia data l'applicazione $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, definita da $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$.
- (i) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base canonica in dominio e codominio.
- (ii) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ di \mathbf{R}^3 e alla base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ di \mathbf{R}^2 .
- (iii) Verificare che le matrici trovate hanno lo stesso rango.
5. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di \mathbf{R}^3 . Sia F un'applicazione lineare tale che $F(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1$, $F(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$, $F(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$.
- (b) Determinare la matrice rappresentativa di F rispetto alla base \mathcal{B} in dominio e codominio.
- (c) Determinare se F è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
- (d) Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Determinare la matrice rappresentativa di F nella base canonica in dominio e codominio.