1. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare se F è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$. Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (iii) Determinare l'immagine tramite F della retta per l'origine span$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 1 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare se F è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$. Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $3F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix})$. Conclusione?

3. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare che F è un'applicazione lineare.
   (ii) Determinare la matrice M tale che $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

4. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un'applicazione lineare. Supponiamo che $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, e $F(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (i) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (ii) Determinare la matrice M tale che $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (qui le coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sono rispetto alla base canonica).

5. Sia data l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare se F è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F.
   (iii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F.
   (iv) Dire se F è iniettiva o suriettiva.

6. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare se F è un'applicazione lineare.
   (ii) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F.
   (iii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F.
   (iv) Dire se F è iniettiva o suriettiva.

7. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (i) Usando la definizione, verificare se F è un'applicazione lineare.
   ii Calcolare $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix})$ e $F(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix})$.
   (iii) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F.
   (iv) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F.
   (v) Dire se F è iniettiva o suriettiva.

8. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F.
   (ii) Calcolare $F(\mathbf{R}^3)$, l'immagine di F.
   (iii) Dire se F è iniettiva o suriettiva.
   (iv) Calcolare l'immagine tramite F del sottospazio $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}$.
   (v) Determinare la dimensione di $U \cap \ker F$.

9. Sia data l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare $\ker F$, il nucleo di F.
   (ii) Calcolare $F(\mathbf{R}^4)$, l'immagine di F.
   (iii) Dire se F è iniettiva o suriettiva.
   (iv) Calcolare l'immagine tramite F del sottospazio $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\}$
   (v) Determinare la dimensione di $U \cap \ker F$.

10. Sia $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare dell'esercizio 9 e sia $G\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $G(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.
   (i) Scrivere la formula generale di $G \circ F$.
   (ii) Calcolare $G \circ F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$.
   (iii) Calcolare il nucleo $\ker F$ e l'immagine $F(\mathbf{R}^4)$.
   (iv) Calcolare il nucleo $\ker(G \circ F)$ e l'immagine $G \circ F(\mathbf{R}^4)$.
   (v) Verificare che il nucleo di F è contenuto nel nucleo di $G \circ F$.

11. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare se F è invertibile.

(ii) Se è invertibile, calcolarne l'inversa.