1. Siano date due matrici $M \in M(m,n,\mathbf{R})$ ed $N \in M(n,k,\mathbf{R})$.
   (i) Verificare che esiste il prodotto ${}^tN \cdot {}^tM$ e che è una matrice delle stesse dimensioni della matrice ${}^t(M \cdot N)$.
   (ii) Date $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ u & v \end{pmatrix}$, verificare che ${}^t(M \cdot N) = {}^tN \cdot {}^tM$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare due matrici B e C quadrate 2×2, diverse tra loro, per cui valga $A \cdot B = A \cdot C$.

3. Sia data la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sia $L_M \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione associata, ossia

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto L_M(X) := M \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

   (i) Calcolare

$$L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_M(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad L_M(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

   (ii) Verificare che $L_M(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \lambda L_M(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.
   (iii) Verificare che $L_M(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = L_M(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) + L_M(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix})$.

4. Siano date le matrici $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ed $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Siano $L_M \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ed $L_N \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ le applicazioni associate.
   (i) Calcolare la composizione $L_N \circ L_M \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, che è definita come

$$L_N \circ L_M(X) = L_N(L_M(X)).$$

   (ii) Calcolare

$$L_N \circ L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_N \circ L_M(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad L_N \circ L_M(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_N \circ L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_N \circ L_M(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

   (iii) Calcolare il prodotto $N \cdot M$.
   (iv) Calcolare

$$L_{NM}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_{NM}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad L_{NM}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_{NM}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad L_{NM}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

   (v) Calcolare l'applicazione associata $L_{NM} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e confrontarla con l'applicazione composta $L_N \circ L_M$.