

1. Sia dato il sottospazio $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$ di \mathbf{R}^3 .

(a) Determinare quali fra i seguenti insiemi di vettori sono basi di S :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Determinare un sottospazio complementare S^c ad S in \mathbf{R}^3 . Che dimensione ha S^c ?

2. Sia dato il sottospazio $V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di \mathbf{R}^4 .

(a) Determinare una base di V e la dimensione di V .

(b) Determinare se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a V .

(c) Determinare se V è contenuto nel sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid 2x_1 - 3x_3 = 0 \right\}$ di \mathbf{R}^4 .

(d) Determinare una base di $V \cap U$ e una base di $V + U$.

3. Siano dati i sottospazi $S = \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ 2a \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ e $T = \left\{ \begin{pmatrix} c+d \\ c-d \\ c+3d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid c, d \in \mathbf{R} \right\}$ di \mathbf{R}^3 .

(a) Determinare la dimensione di S e la dimensione di T .

(b) Determinare una base di $S + T$.

(c) Determinare una base di $S \cap T$.

4. Sia dato il sottospazio $S = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, 2, \mathbf{R}) \mid \begin{cases} b+c=0 \\ a-d=0 \end{cases} \right\}$ dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

(a) Determinare una base di S e la dimensione di S .

(b) Verificare che la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ appartiene ad S . Determinare le sue coordinate nella base trovata in (a).

(c) Determinare se le matrici $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di S .

(d) Determinare se le matrici $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di S .

5. Sia dato il vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in \mathbf{R}^2 .
- Determinare due diversi completamenti di \mathbf{v}_1 ad una base di \mathbf{R}^2 .
 - Sia $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$. Determinare due diversi complementi (o sottospazi complementari) V^c di V in \mathbf{R}^2 . Farne un disegno.
6. Sia dato il vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in \mathbf{R}^3 .
- Determinare due diversi completamenti di \mathbf{v}_1 ad una base di \mathbf{R}^3 .
 - Sia $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1\}$. Determinare due diversi complementi (o sottospazi complementari) V^c di V in \mathbf{R}^3 . Che dimensione hanno?
7. Siano dati i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in \mathbf{R}^3 .
- Determinare due diversi completamenti di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ad una base di \mathbf{R}^3 .
 - Sia $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Determinare due diversi complementi (o sottospazi complementari) V^c di V in \mathbf{R}^3 . Che dimensione hanno?
8. Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V . Verificare che la somma $U + W = \{v \in V \mid v = u + w, u \in U, w \in W\}$ è un sottospazio vettoriale di V .
9. Verificare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base \mathcal{B} di \mathbf{R}^4 .
- Determinare le coordinate in \mathcal{B} dei vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
 - Determinare i vettori che in \mathcal{B} hanno coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$
10. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, vettori linearmente indipendenti in V . Siano $U = \text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{u}\}$ e $W = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.
- Verificare che $U \cap W = \{O\}$.
 - Determinare le coordinate dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{x} + 2\mathbf{u}$ nella base $\{\mathbf{x}, \mathbf{u}\}$ di U .
 - Determinare un complemento ad U in V ed un complemento a W in V .
 - Determinare un complemento ad $\text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{w}\}$ in V .
 - Determinare un complemento ad $\text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ in V .
11. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in V . Sia $U = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.
- Determinare le coordinate dei vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}, 3\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$ nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ di U .
 - Determinare le coordinate dei vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}, 3\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$ nella base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ di U .