

1. Dato il sistema lineare di tre equazioni in 3 incognite $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$,
- (a) determinare se le terne di vettori

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono soluzioni del sistema;

- (b) determinare se il sistema è o meno compatibile;
 (c) se il sistema è compatibile, determinare la soluzione generale.
2. Determinare la soluzione generale del sistema lineare di due equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Disegnare le soluzioni ottenute.

3. Considerare l'equazione lineare in due variabili $x_1 - 3x_2 = 0$.
- (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione;
 (b) Verificare che date due soluzioni qualunque dell'equazione la loro somma è soluzione dell'equazione;
 (c) Verificare che data una soluzione qualunque dell'equazione tutti i suoi multipli sono soluzioni dell'equazione.
4. Considerare l'equazione lineare in due variabili $x_1 - 3x_2 = 3$.
- (a) Verificare che $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono soluzioni dell'equazione;
 (b) Verificare che $A + B$ non è soluzione dell'equazione;
 (c) Verificare che $2A$ e $4B$ non sono soluzioni dell'equazione;
 (d) Disegnare la retta definita dall'equazione, ed i punti A , B , $A + B$, $2A$ e $4B$. Osservare che A , B appartengono alla retta, mentre i punti $A + B$, $2A$ e $4B$ no.
5. Considerare l'equazione lineare in tre variabili $x_3 = 0$.
- (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione e disegnare l'insieme trovato;
 (b) Verificare che date due soluzioni qualunque dell'equazione la loro somma è soluzione dell'equazione;
 (c) Verificare che data una soluzione qualunque dell'equazione tutti i suoi multipli sono soluzioni dell'equazione.
6. Considerare l'equazione lineare in tre variabili $x_3 = 1$.
- (a) Determinare la soluzione generale dell'equazione e disegnare l'insieme trovato;
 (b) Verificare che date due soluzioni qualunque dell'equazione la loro somma è soluzione dell'equazione;
 (c) Verificare che data una soluzione qualunque dell'equazione tutti i suoi multipli sono soluzioni dell'equazione.

7. Dati i vettori $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in \mathbf{R}^2 ,

- (a) Disegnare i vettori $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$, $A - B$, $A - 2B$, $A - 3B$;
 (b) Disegnare $A + tB$, per $t \in \mathbf{R}$. Di che insieme si tratta?

8. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbf{R}^2 :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = -x_2 \right\} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq 2 \right\};$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - x_2 > 0 \right\} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 < 1 \right\};$$

(ii) Dati $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$X \in A, \quad 2X \in A, \quad O \in A, \quad X \in B, \quad 3X \in B, \quad O \in B, \quad X \in D,$$

$$Y \in D, \quad O \in D, \quad 2Y \in D, \quad -Y \in D, \quad X \in C, \quad Y \in C, \quad X + Y \in C, \quad -X \in C$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda X \in C.$$

(iii) Decidere se A , B , C , D sono sottospazi vettoriali di \mathbf{R}^2 .

9. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbf{R}^3 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \geq 0 \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \end{cases} \right\}.$$

10. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbf{R}^3

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} : -1 < t < 1 \right\}, \quad V = \{(0, 0, 0)\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

(ii) Dati $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$O \in U, \quad O \in V, \quad O \in W, \quad Y \in U, \quad \frac{1}{3}Y \in U, \quad 2Y \in V$$

$$X \in W, \quad Y \in W, \quad X + Y \in W, \quad -X \in W, \quad X - Y \in W$$

(iii) Decidere se U , V , W sono o meno sottospazi vettoriali di \mathbf{R}^3 .