Nei seguenti esercizi si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale, $RC(O,E)$ per $\mathbf{R}^n$, con coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. In $\mathbf{R}^3$ si consideri fissato il vettore $\mathbf{u}_0 = (1,2,1)$. Sia T l'operatore lineare di $\mathbf{R}^3$, definito da

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{u}_0, \ \ \forall \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

   (i) Stabilire se T e' un operatore autoaggiunto;
   (ii) Calcolare la matrice di T rispetto alla base canonica e confrontare con la risposta data in (i).

2. Sia Λ il trapezio in $\mathbf{R}^2$ di vertici: $(1,1), \quad (6,1), \quad (2,3), \quad (3,3)$.
   (i) Determinare l'immagine di Λ dopo la traslazione $T_{\mathbf{p}}$, dove $\mathbf{p} = (0,-1)$;
   (ii) Determinare l'immagine di Λ dopo la riflessione S_0 rispetto all'asse x_1;
   (iii) Determinare l'immagine di Λ dopo la rotazione attorno all'origine, R_π, di angolo π.

3. Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici: $(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1)$.
   (i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ attorno all'origine manda il quadrato Q in se stesso?
   (ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/4}$ attorno all'origine.

4. Siano $\mathbf{v} = (1,2)$ e $\mathbf{w} = (-1,-1)$ vettori di $\mathbf{R}^2$.
   (i) Calcolare l'orientazione della coppia ordinata $\{\mathbf{v}, \ \mathbf{w}\}$, i.e. $Or(\mathbf{v}, \mathbf{w})$;
   (ii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse x_1. Calcolare $Or(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$;
   (iii) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta passante per l'origine e formante un angolo φ con l'asse delle ascisse. Calcolare $Or(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$;
   (iv) Sia R_ψ la rotazione di centro l'origine e angolo ψ. Calcolare $Or(R_\psi(\mathbf{v}), R_\psi(\mathbf{w}))$.

5. (i) Scrivere le equazioni della rotazione $R_{P_0,\pi/6}$ di centro $P_0 = (1,2)$ ed angolo $\pi/6$;
   (ii) Scrivere le equazioni della simmetria S_r rispetto alla retta

$$r: \quad x_1 - x_2 + 1 = 0;$$

   (iii) Individuare quale deve essere la retta s di $\mathbf{R}^2$, passante per P_0, per cui si abbia $S_r \circ S_s = R_{P_0,\pi/6}$.