Nei seguenti esercizi si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale, $RC(O,E)$ per $\mathbf{R}^n$, con coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. (i) Stabilire la natura delle quadrica euclidea Q, di equazione cartesiana

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 2 = 0.$$

(ii) Dedurre inoltre la forma canonica affine di Q.

Svolgimento: (i) Un modo per procedere e' osservare che l'equazione di Q si puo' scrivere anche come

$$(x_1 + x_2)^2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0.$$

Ponendo $t := x_1 + x_2$ si ottiene un'equazione di secondo grado in t,

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Tale equazione ha le due soluzioni $t = 1, \quad t = 2$. Cio' significa che il polinomio in t si fattorizza in

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$$

e quindi, anche

$$(x_1 + x_2)^2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = (x_1 + x_2 - 1)(x_1 + x_2 - 2) = 0.$$

Questo significa che la quadrica Q e' costituita da due piani paralleli. Ne segue che la sua forma canonica affine, in un'opportuno riferimento, sara'

$$X_1^2 = 1.$$

Si puo' invece calcolare il rango della matrice A della quadrica Q. Si vede allora che ha rango 1. Percio', dalla classificazione, o la quadrica e' priva di punti reali, o e' un cilindro parabolico, o e' costituita da un piano contato 2 volte oppure e' costituita da due piani paralleli.

Facilmente si vede che Q contiene il punto $p = (1, 1, 0)$. Q non puo' essere un cilindro parabolico, dato che il piano tangente a Q nel punto p ha equazione $x_1 + x_2 - 2 = 0$, che messo a sistema con l'equazione di Q, determina la relazione $0 = 0$ invece di una retta contata 2 volte.

Percio', per escludere che sia un piano contato 2 volte, basta intersecare con una retta generica dello spazio e vedere che si trovano 2 punti di intersezione distinti e non un punto contato 2 volte.

2. (i) Stabilire la natura delle quadrica euclidea Q, di equazione cartesiana

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_3 = 1.$$

(ii) Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.

Svolgimento: (i) La matrice associata alla parte omogenea di grado 2 di Q ha rango 1. Facilmente si vede che la quadrica Q contiene punti reali, per esempio $(0, 0, 1)$. Il piano tangente in $(0, 0, 1)$ ha equazione

$$x_1 + 1(x_3 - 1) = 0.$$

Mettendo a sistema con l'equazione di Q, si ottiene

$$x_1 + x_3 - 1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0,$$

cioe'

$$x_1 + x_3 - 1 = (x_1 + x_2)^2 = 0$$

che e' l'intersezione di un piano e di un piano contato 2 volte, cioe' e' una retta contata due volte. Quindi Q e' un paraboloide ellittico. la sua forma canonica affine e', in un opportuno riferimento,

$$X_1^2 + X_2 = 0.$$

3. Dedurre una forma canonica affine della quadrica

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1 - 2 = 0.$$

Svolgimento: (i) Osserviamo che Q si puo' scrivere come

$$(x_1^2 + 4x_1 + 4 - 4) + x_2^2 - 2x_3^2 - 2 = 0,$$

ossia

$$(x_1 + 2)^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6 = 0.$$

Se facciamo la sostituzione

$$X = x_1 + 2, \quad Y = x_2, \quad Z = x_3$$

che equivale a traslare l'origine del riferimento, in tali nuove coordinate, l'equazione di Q diventa

$$X^2/6 + Y^2/6 - Z^2/3 = 1.$$

Questo comporta che Q e' un iperboloide iperbolico (i.e. ad una falda) e quindi una sua forma canonica affine sara', in opportune coordinate

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 1.$$

4. Riconoscere il tipo di quadrica Q:

$$x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3 = 0.$$

(i) Dedurre che Q contiene due sistemi di rette. Descrivere le rette di tali sistemi.
(ii) Determinare equazioni di ciascuna delle due rette passanti per il punto $p = (2, 0, 2)$.

Svolgimento: Si osserva immediatamente che Q e' un paraboloide iperbolico. (i) Possiamo scrivere l'equazione di Q come

$$(x_1 + 2x_2)(x_1 - 2x_2) = 2x_3.$$

Allora, si vede che Q contiene le 2 famiglie di rette:

$$l_t : \quad x_1 + 2x_2 - tx_3 = x_1 - 2x_2 - (2/t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}^*$$

e

$$m_s : \quad x_1 - 2x_2 - sx_3 = x_1 + 2x_2 - (2/s) = 0, \quad s \in \mathbf{R}^*.$$

Osserviamo che, per ogni $t \neq t'$, l_t e $l_{t'}$ sono sghembe, mentre $l_t \Updownarrow_{\sqcup'}$ si intersecano in un punto. (ii) Il passaggio per p comporta che $t = 1$ e $s = 1$, cioe' si hanno la retta l_1 e la retta m_1.