Nei seguenti esercizi si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale, $RC(O, E)$ per $\mathbf{R}^n$, con coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. Disegnare le seguenti coniche euclidee:
   (i) $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 = 3$;
   (ii) $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 13 = 0$;
   (iii) $x_1^2 + 2x_2^2 = 0$;
   (iv) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 3$.

   Svolgimento: (i) E' facile accorgersi che l'equazione data si puo' scrivere in forma

   $$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 16$$

   che e' quindi una circonferenza di centro $C = (2, 3)$ e raggio 4. (ii) Scrivendo l'equazione data in

   $$(x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 = -18$$

   la conica risulta essere un'iperbole generale di centro di simmetria $C = (2, -3)$ ed asintoti paralleli alle bisettrici dei quadranti, i.e. $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$. (iii) E' una conica puntiforme, cioe' supportata solo nell'origine. (iv) E' un'ellisse di centro l'origine ed assi le bisettrici dei quadranti, i.e. paralleli alle rette $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$.

2. Disegnare le seguenti coniche, determinando le coordinate dell'eventuale centro e gli eventuali assi di simmetria:
   (i) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 + 6x_2 + 8 = 0$;
   (ii) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 5 = 0$;
   (iii) $x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 = 0$;
   (iv) $x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 1 = 0$.

   Svolgimento: i) Se poniamo

   $$x_1 = x + (3/2), \quad x_2 = y - (1/2)$$

   e sostituiamo nell'equazione della conica data, otteniamo la conica di equazione

   $$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1.$$

   Sia

   $$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   la matrice della parte omogenea di grado 2 della conica. Una base ortonormale per $\mathbf{R}^2$, costituita da autovettori per A, e'

   $$\{v_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \ v_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}.$$

   Sia

   $$x = (\sqrt{2}/2)x' - (\sqrt{2}/2)y', \quad y = (\sqrt{2}/2)x' + (\sqrt{2}/2)y'.$$

L'equazione della conica in queste nuove coordinate diventa

$$2(x')^2 + 4(y')^2 = 1$$

che e' un'ellisse. Quindi, anche la conica di partenza e' un'ellisse, ha centro di simmetria, espresso nelle vecchie coordinate, $C = (3/2, -1/2)$ ed i suoi assi di simmetria sono, nelle vecchie coordinate,

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 - x_2 = 2.$$

(ii) La matrice della parte omogenea di grado 2 della conica e'

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

percio' ha rango 1. Quindi la conica, o e' una retta doppia (cioe' una parabola degenere) oppure e' una parabola (generale). Una base ortonormale per $\mathbf{R}^2$, costituita da autovettori per A, e' come nel punto (i), data da

$$\{v_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2),\ v_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}.$$

Come nel punto (i), scriviamo

$$x_1 = (\sqrt{2}/2)x - (\sqrt{2}/2)y, \quad x_2 = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2)y.$$

Sostituendo nell'equazione della conica, otteniamo:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 5 = 0.$$

Questa e' una parabola (generale) di asse $x = \sqrt{2}/2$ e vertice $V = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$. Poiche', dalle relazioni precedenti, troviamo

$$x = (\sqrt{2}/2)x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2,$$

l'asse della parabola iniziale e', nelle vecchie coordinate, dato da

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Analogamente, poiche'

$$x_2 = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2)y$$

allora il vertice V, nelle vecchie coordinate, e' $V = (3/2, -1/2)$. (iii) Ragionando come nei due punti precedenti, troviamo che la conica e' un'iperbole generale di centro di simmetria $(10/9, -2/9)$ e asintoti

$$3x_1 - 3x_2 - 4 = 0, \quad 3x_1 + 6x_2 - 2 = 0.$$

(iv) Scrivendo la conica come $(x_1 - 1)^2 - x_2^2 = 0$, si riconosce immediatamente che e' un'ipebole degenere. Infatti e' la conica riducibile, costituita dalle due rette

$$x_1 - x_2 - 1 = 0, \quad x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

3. Sia C la conica di equazione cartesiana $x_2^2 = 3x_1x_2$.
   (i) Disegnare C;
   (ii) Determinare l'equazione di C dopo una traslazione di passo $(1, 2)$;
   (iii) Determinare l'equazione di C dopo una rotazione di angolo $\pi/4$ attorno all'origine.

Svolgimento: (i) La conica e' un'iperbole degenere, dato che e' l'unione delle due rette

$$x_2 = 0, \quad x_2 = 3x_1.$$

(ii) L'equazione della coppia di rette traslate diventa

$$(x_2 - 2)^2 = 3(x_1 - 1)(x_2 - 2) = x_2^2 - 3x_1x_2 - x_2 + 6x_1 - 2 = 0.$$

(iii) La coppia di rette ruotate e'

$$(-(\sqrt{2}/2)x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2)^2 - 3((\sqrt{2}/2)x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2)(-(\sqrt{2}/2)x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2) = 0$$

cioe'

$$2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 = 0.$$