Nei seguenti esercizi si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale, $RC(O,E)$ per $\mathbf{R}^n$, con coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. Sia $\mathbf{v} = (-1,-1,-1) \in \mathbf{R}^3$.
   (i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{v}$;
   (ii) Sia l la retta di equazioni parametriche
   $$\mathbf{x} = (1,-1,0) + t(2,1,1), \ \ t \in \mathbf{R}.$$
   Calcolare le equazioni parametriche della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ a l.

   Svolgimento: (i) Una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ avente $\mathbf{v}$ come primo vettore della base e', ad esempio
   $$\mathbf{f}_1 = \mathbf{v} = (-1,-1,-1), \ \mathbf{f}_2 = (1,-1,0), \ \mathbf{f}_3 = (-1,-1,2).$$
   Per renderla ortonormale, basta dividere ogni vettore per la sua norma:
   $$\mathbf{e}_1' = \mathbf{f}_1/||\mathbf{f}_1|| = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), \ \mathbf{e}_2' = \mathbf{f}_2/||\mathbf{f}_2|| = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),$$
   e
   $$\mathbf{e}_3' = \mathbf{f}_3/||\mathbf{f}_3|| = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}).$$
   La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno ad $\mathbf{e}_1'$, espressa in tale nuova base ortonormale, ha matrice rappresentativa standard:
   $$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   La matrice che trasforma la base canonica nella base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ e' la matrice M che ha per colonne le coordinate dei vettori di tale nuova base. Quindi, la matrice rappresentativa di $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$, espressa rispetto alla base canonica, e' la matrice A data da
   $$A = MA'M^{-1} = MA'M^t,$$
   dato che M e' una matrice ortogonale. Percio'
   $$A := \begin{pmatrix} 1/3 & (1+\sqrt{3})/3 & (1-\sqrt{3})/3 \\ (1-\sqrt{3})/3 & 1/3 & (1+\sqrt{3})/3 \\ (1+\sqrt{3})/3 & (1-\sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$
   (ii) Le equazioni parametriche cercate si ottengono, ad esempio, applicando la matrice A al punto generico della retta l, che e' $(1+2t, -1+t, t)$, con $t \in \mathbf{R}$. Si ottiene quindi
   $$\mathbf{x} = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3) + t(4/3, (4-\sqrt{3})/3, (4+\sqrt{3})/3), \ \ t \in \mathbf{R}.$$
   Un modo equivalente per trovare le equazioni parametriche della nuova retta era anche il seguente: si prendono 2 punti qualsiasi P e Q di l, si considerano i trasformati di tali due punti mediante $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$, i.e. $A(P)$ e $A(Q)$, e infine si determina l'equazione parametrica della retta passante per i due punti $A(P)$ e $A(Q)$.

2. Sia $\mathbf{v} = (-1, -1, -1) \in \mathbf{R}^3$.
   (i) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ attorno al vettore $\mathbf{v}$;
   (ii) Sia Π il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

   Calcolare le equazioni parametriche del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ a Π.

Svolgimento: (i) Nella base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ determinata nell'esercizio precedente, la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno ad $\mathbf{e}_1'$ ha, rispetto a tale base ortonormale, matrice rappresentativa

$$B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio', rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa e'

$$B = MB'M^t = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})/3 & (2-\sqrt{2}-\sqrt{6})/6 & (2-\sqrt{2}+\sqrt{6})/6 \\ (2-\sqrt{2}+\sqrt{6})/6 & (1+\sqrt{2})/3 & (2-\sqrt{2}-\sqrt{6})/6 \\ (2-\sqrt{2}-\sqrt{6})/6 & (2-\sqrt{2}+\sqrt{6})/6 & (1+\sqrt{2})/3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Basta prendere tre punti distinti e non allineati, $P, Q, T \in \Pi$, determinare i tre punti trasformati $P' = B(P)$, $Q' = B(Q)$ e $T' = B(T)$, e poi calcolare le equazioni parametriche del piano Π' per questi nuovi tre punti.

3. Sia π il piano di equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 = 0$.
   (i) Calcolare le formule di riflessione rispetto a π;
   (ii) calcolare le immagini dei punti $(0, 0, 0)$ e $(-1, 1, -1)$;
   (iii) calcolare l'immagine della retta di equazioni parametriche

$$(5, 0, 0) + t\ (1, 0, -1), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Svolgimento: (i) Un versore normale a π e'

$$\underline{n} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0).$$

Una base ortonormale di π e' data per esempio da

$$\{\underline{v} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0),\ \underline{w} = (0, 0, 1)\}.$$

Quindi $O := \{\underline{v}, \underline{w}, \underline{n}\}$ e' una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$. La matrice che rappresenta la simmetria S_π nella base O e'

$$C' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio', se N e' la matrice che trasforma la base canonica nella base ortonormale O, allora N e' una matrice ortogonale e la simmetria S_π ha matrice rappresentativa in base canonica data da:

$$C = NC'N^t = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto,

$$S_\pi(x_1, x_2, x_3) = (3/5x_1 - 4/5x_2, -4/5x_1 - 3/5x_2, x_3/5).$$

(ii) $S_\pi(0,0,0) = (0,0,0)$, $S_\pi(-1,1,-1) = (-7/5, 1/5, -1)$. (iii) Basta applicare la matrice C al punto generico della retta data, che e' $(5+t, 0-t)$; percio' le equazioni parametriche della retta sono:

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, -4, 0) + t(3/5, -4/5, -1), \quad t \in \mathbf{R}.$$

4. Sia K il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici:

$$(1,1,1), \ (1,-1,1), \ (-1,1,1), \ (-1,-1,1),$$

$$(1,1,-1), \ (1,-1,-1), \ (-1,1,-1), \ (-1,-1,-1).$$

(i) Determinare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_3$;
(ii) Determinare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_1$;
(iii) Determinare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno a $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1$;
(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

Svolgimento: (i) La rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_3$ e':

$$R_{\pi/2}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, x_3),$$

percio' K viene mandato in se stesso. (ii) Stessa conclusione come nel punto precedente. (iii) La rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $-\mathbf{e}_1$ e' esattamente come la rotazione $R_{-\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_1$. Analoga conclusione come nei punti precedenti (i) ed (ii). (iv) Se K viene mandato in se stesso, allora l'asse della rotazione e' uno dei seguenti:
(a) retta congiungente i centri di due facce opposte;
(b) retta congiungente i punti medi di due spigoli opposti;
(c) retta congiungente 2 vertici opposti.
Le rotazioni di tipo (a) sono di angoli $k(\pi/2)$, $k \in \mathbf{Z}$. Le rotazioni di tipo (b) devono mandare gli spigoli, che questo asse interseca, in se stessi. Percio' sono rotazioni di angolo $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Infine, le rotazioni di tipo (c) devono mandare i 3 lati uscenti da uno dei 2 vertici in loro stessi, cioe' i tre spigoli devono essere permutati fra loro. Percio' e' una rotazione di angolo $(2k\pi)/3$.

5. Sia T l'operatore autoaggiunto di $\mathbf{R}^4$ definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Scrivere l'equazione della forma quadratica Q associata a T.
(ii) Utilizzando il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A determinando la base ortonormale di autovettori di A in cui Q risulta essere una forma quadratica diagonale.
(iii) Dedurre la forma canonica di Sylvester di Q, determinando esplicitamente la segnatura di Q.

Svolgimento: (i) La matrice della forma quadratica Q coincide con A. Quindi Q ha equazione:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3x_4.$$

(ii) Il polinomio caratteristico di A e'

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2.$$

Quindi A ha due autovalori, i.e. 1 e -1, ambedue di molteplicita' algebrica 2. Denotati con V_1 e V_{-1} i rispettivi autospazi, troviamo che

$$V_1 = Span\{(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)\}, \quad V_{-1} = Span\{(0,1,0,0),\ (0,0,1,-1)\}$$

poiche' le equazioni cartesiane per V_1 sono

$$x_2 = x_3 - x_4 = 0,$$

mentre quelle per V_{-1} sono

$$x_1 = x_3 + x_4 = 0.$$

Per il teorema Spettrale, per diagonalizzare A basta considerare una base ortonormale di autovettori di A. Sappiamo che i due autospazi V_1 e V_{-1} sono gia' fra di loro ortogonali, poiche' sono autospazi relativi ad autovalori distinti. Osserviamo inoltre che i generatori di V_1 (rispettivamente di V_{-1}) sono due vettori ortogonali. Percio' per determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di A, basta normalizzare i 4 vettori trovati. Otteniamo che la base voluta e'

$$O := \{(1,0,0,0),\ \ (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),\ \ (0,1,0,0),\ \ (0,0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\}.$$

Dalla teoria generale, in tale base, la matrice A diventa congruente alla matrice

$$A' =:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cioe' alla matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, nell'ordine relativo alla scelta dell'ordinamento dei vettori della base O. Questo significa che la forma quadratica Q in tale base ha, rispetto alle opportune coordinate, equazione

$$Q(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2.$$

(iii) Ovviamente la base O e' gia' una base di Sylvester, data la forma di Q. La segnatura di Q e' ovviamente $(2,-2)$, come si deduceva gia' dal segno degli autovalori di A.