Nei seguenti esercizi si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale, $RC(O, E)$ per $\mathbf{R}^n$, con coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. In $\mathbf{R}^3$ si consideri fissato il vettore $\mathbf{u}_0 = (1, 2, 1)$. Sia T l'operatore lineare di $\mathbf{R}^3$, definito da

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{u}_0, \;\; \forall \;\; \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

(i) Stabilire se T e' un operatore autoaggiunto;
(ii) Calcolare la matrice di T rispetto alla base canonica e confrontare con la risposta data in (i).

Svolgimento: (i) T non e' autoaggiunto. Infatti, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$, ricordando le proprieta' del prodotto vettoriale, si ha che

$$T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x} \times \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (-\mathbf{y} \times \mathbf{u}_0) = \mathbf{x} \cdot (-T(\mathbf{y})).$$

Poiche' $T = -T$ se e solo se e' l'operatore nullo, si ha manifestamente che $T \neq -T$, poiche' T non e' l'operatore identicamente nullo. Percio' T non puo' essere autoaggiunto.

(ii) Per calcolare la matrice A di T rispetto alla base canonica, basta vedere le immagini $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$, dei tre vettori della base canonica. Per definizione di T, basta calcolare i tre prodotti vettoriali

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{u}_0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Si ha

$$T(\mathbf{e}_1) = (0, -1, 2), \quad T(\mathbf{e}_2) = (1, 0 - 1), \quad T(\mathbf{e}_3) = (-2, 1, 0).$$

Percio' la matrice A ha per i-esima colonna il vettore $T(\mathbf{e}_i)$ scritto per colonna, $1 \leq i \leq 3$. Manifestamente si vede che la matrice A non e' una matrice simmetrica. Poiche' la matrice A e' espressa utilizzando una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard che esiste su $\mathbf{R}^3$, allora possiamo anche in questo modo concludere che T non puo' essere un operatore autoaggiunto, come abbiamo dedotto in modo intrinseco al punto (i).

2. Sia Λ il trapezio in $\mathbf{R}^2$ di vertici: $(1, 1)$, $(6, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$.
(i) Determinare l'immagine di Λ dopo la traslazione $T_{\mathbf{p}}$, dove $\mathbf{p} = (0, -1)$;
(ii) Determinare l'immagine di Λ dopo la riflessione S_0 rispetto all'asse x_1;
(iii) Determinare l'immagine di Λ dopo la rotazione attorno all'origine, R_π, di angolo π.

Svolgimento: (i) Si tratta del trapezio Λ' di vertici

$$(1, 0), \quad (6, 0), \quad (2, 2), \quad (3, 2).$$

(ii) La matrice di S_0 e' data da

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\Lambda)$ e' il trapezio di vertici

$$(1, -1), \quad (6, -1), \quad (2, -3), \quad (3, -3).$$

(iii) La matrice di R_π e' data da

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $B(\Lambda)$ e' il trapezio di vertici $(-1,-1)$, $(-6,-1)$, $(-2,-3)$, $(-3,-3)$.

3. Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.
   (i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ attorno all'origine manda il quadrato Q in se stesso?
   (ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/4}$ attorno all'origine.

   Svolgimento: (i) Sono tutti gli angoli della forma $\varphi = k(\pi/2)$, con k un numero intero.
   (ii) La matrice della rotazione $R_{\pi/4}$ e' data da:

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

   Percio' $A(Q)$ e' il quadrato di vertici $(-\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},0)$.

4. Siano $\mathbf{v} = (1,2)$ e $\mathbf{w} = (-1,-1)$ vettori di $\mathbf{R}^2$.
   (i) Calcolare l'orientazione della coppia ordinata $\{\mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$, i.e. $Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$;
   (ii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse x_1. Calcolare $Or(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$;
   (iii) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta passante per l'origine e formante un angolo φ con l'asse delle ascisse. Calcolare $Or(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$;
   (iv) Sia R_ψ la rotazione di centro l'origine e angolo ψ. Calcolare $Or(R_\psi(\mathbf{v}), R_\psi(\mathbf{w}))$.

   Svolgimento: (i) Osserviamo che

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 = Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

   percio' la coppia ordinata e' orientata positivamente. (ii) $Or(S_0(\mathbf{v}),\ S_0(\ \mathbf{w})) = det(S_0)\ Or(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -1 = -Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$. (iii) Come prima $Or(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w})) = det(S_\varphi) = -1 = -Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$. (iv) $Or(R_\psi(\mathbf{v}), R_\psi(\mathbf{w})) = det(R_\psi) = 1 = Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$.

5. (i) Scrivere le equazioni della rotazione $R_{P_0,\pi/6}$ di centro $P_0 = (1,2)$ ed angolo $\pi/6$;
   (ii) Scrivere le equazioni della simmetria S_r rispetto alla retta

$$r: \quad x_1 - x_2 + 1 = 0;$$

   (iii) Individuare quale deve essere la retta s di $\mathbf{R}^2$, passante per P_0, per cui si abbia $S_r \circ S_s = R_{P_0,\pi/6}$.

   Svolgimento: (i) La matrice della rotazione di angolo $\pi/6$ attorno all'origine e':

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

   Percio', le formule di rotazione sono, in forma vettoriale, date da

$$\underline{x}' = A(\underline{x}) + P_0 - A(P_0),$$

equivalentemente in forma cartesiana

$$x'_1 = (x_1 - \sqrt{3}x_2 + 1 + 2\sqrt{3})/2 \quad x'_2 = (\sqrt{3}x_1 + x_2 + 2 - \sqrt{3})/2.$$

(ii) Sia $P = (a, b)$ un punto generale di $\mathbf{R}^2$. La retta n passante per P e perpendicolare a r ha equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = a + b.$$

Sia $N = r \cap n$, che ha coordinate

$$N = ((a + b - 1)/2, (a + b + 1)/2).$$

Se poniamo $P' = (a', b')$ allora P' sara' il simmetrico di P rispetto a r se e solo, come vettori $P' - N = N - P$, quindi $P' = 2N - P = (b - 1, a + 1)$. Le relazioni che valgono sono quindi

$$a' = b - 1, \; b' = a + 1.$$

Questo significa che le equazioni della simmetria in $\mathbf{R}^2$ sono

$$x'_1 = x_2 - 1 \quad x'_2 = x_1 + 1.$$