Nell'esercizio 1, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale, - $RC(O,E)$ per $\mathbf{R}^2$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2), mentre negli altri esercizi si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O,E)$ per $\mathbf{R}^3$ con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3).

1. Siano r_1 e r_2 due rette passanti ambedue per il punto $p_0 = (2, -1)$ e rispettivamente per $q_1 = (18/5, 1/5)$ la prima e per $q_2 = (2, 1)$ la seconda. Assumiamo che tali rette siano tangenti ad una circonferenza $\mathbf{C}$ rispettivamente in q_1 ed in q_2.
   (i) Determinare il centro c, il raggio r e l'equazione cartesiana di $\mathbf{C}$;
   (ii) Disegnare la circonferenza $\mathbf{C}$.
   (iii) Presi infine $\mathbf{v} = (1, 2)$ e $\mathbf{w} = (-1, -1)$, due vettori di $\mathbf{R}^2$, calcolare l'orientazione della coppia ordinata $\{\mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$, i.e. $Or(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

   Svolgimento: (i) Denotiamo con n_i la retta perpendicolare alla retta r_i e passante per il punto q_i, $1 \leq i \leq 2$. Allora, il centro c sara' determinato dall'intersezione $n_1 \cap n_2$ mentre il raggio sara' dato dalla distanza $d(c, q_i)$, per uno qualsiasi dei due punti q_i, $1 \leq i \leq 2$. Un vettore direttore di r_1 e' $(4, 3)$, percio' la retta n_1 ha equazione cartesiana $4x + 3y - 15 = 0$. Un vettore direttore di r_2 e' $(0, 1)$, percio' la retta n_2 ha equazione cartesiana $y - 1 = 0$. Allora $c = (3, 1)$ mentre $r = d(c, q_1) = d(c, q_2) = 1$. L'equazione cartesiana della circonferenza $\mathbf{C}$ e' data da $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$, cioe':

   $$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0.$$

   (ii) Per disegnare la circonferenza, basta conoscere c e r. (iii) Osserviamo che il determinante della matrice che ha come colonne le coordinate dei due vettori dati é 1. Perció, per definizione $Or(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 1$, cioe' la coppia ordinata e' orientata positivamente (i.e. equiorientata con la base canonica).

2. Dati i vettori

   $$\mathbf{x} = (0, 1, 0),\ \mathbf{y} = (1, 1, 1),\ \mathbf{z} = (2, 0, 1)$$

   in $\mathbf{R}^3$,
   (i) calcolare il volume del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori dati;
   (ii) calcolare l'orientazione della terna ordinata $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}\}$.

   Svolgimento: (i) Il volume del parallelepipedo richiesto si trova calcolando il valore assoluto del determinante della matrice quadrata di ordine 3 che ha per colonne le coordinate della terna di vettori. Tale volume risulta uguale ad 1. (ii) Il valore del determinante della matrice associata alla terna ordinata $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}\}$ e' - 1; segue che $Or\{\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}\} = -1$, i.e. la terna ordinata non e' equiorientata (o equiversa) alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

3. Siano assegnati in $\mathbf{R}^3$ la retta

   $$r: \quad x - y = y + 2z = 0,$$

   ed il piano

   $$\Pi : x + z = 0.$$

   Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r' che é la proiezione ortogonale di r sul piano Π.

Svolgimento: La retta r' sara' determinata dall'intersezione di Π con Γ, dove Γ e' il piano passante per la retta r e perpendicolare a Π, i.e. $r' = \Pi \cap \Gamma$. Un vettore normale a Π e' il vettore $\underline{n} = (1,0,1)$. Il fascio di piani di asse r ha equazione:

$$\lambda(x-y) + \mu(y+2z) = 0,$$

con λ e μ numeri reali variabili, non entrambi nulli. In tale fascio di piani, vogliamo l'unico piano che sia parallelo a $\underline{n}$; equivalentemente l'unico piano il cui vettore normale $\underline{n}_{\lambda,\mu} = (\lambda, \mu-\lambda, 2\mu)$ sia perpendicolare ad $\underline{n}$. Percio', imponendo

$$\underline{n} \cdot \underline{n}_{\lambda,\mu} = 0$$

si ottiene la relazione lineare tra λ e μ,

$$\lambda + 2\mu = 0,$$

cioe', $\lambda = -2\mu$. Sostituendo tale relazione nell'equazione del fascio di piani, e ricordando che un'equazione cartesiana di un piano e' definita a meno di un coefficiente di proporzionalita', troviamo che l'equazione di Γ e' $2x - 3y + 2z = 0$. Percio', la retta r' ha equazioni cartesiane:

$$r': \quad x + z = 2x - 3y + 2z = 0.$$

4. Sono assegnate in $\mathbf{R}^3$ la retta

$$r: \quad x - y - 1 = z = 0,$$

ed il piano

$$\Pi : x + 2y - z = 0.$$

(i) Determinare il piano Λ contenente r e normale a Π;
(ii) Determinare la retta s, proiezione ortogonale di r su Π;
(iii) Determinare l'angolo convesso $\theta(r,s)$ tra r ed s;

Svolgimento: (i) Il piano Π ha vettore normale $\underline{n} = (1,2,-1)$. Sia

$$\lambda(x-y-1) + \mu z = 0$$

l'equazione cartesiana del fascio di piani di asse la retta r, con λ e μ numeri reali variabili, non entrambi nulli. Imponendo il parallelismo con $\underline{n}$, determiniamo $\lambda - 2\lambda - \mu = 0$, i.e. $\mu = -\lambda$. Percio' il piano Λ ha equazione cartesiana $x - y - z = 1$. (ii) La retta s e' l'intersezione di Π con Λ, percio':

$$s: \quad x - y - z - 1 = x + 2y - z = 0.$$

(iii) La retta r ha vettore direttore $\underline{r} = (1,1,0)$, la retta s ha vettore direttore $\underline{s} = (1,0,1)$. Percio',

$$cos(\theta(r,s)) = \pm(\underline{r} \cdot \underline{s})/||\underline{r}||||\underline{s}|| = \pm 1/2,$$

i.e. $\theta(r,s)$ e' o $\pi/3$ oppure $(2\pi)/3$, a seconda di come sono orientate le due rette.

5. Dati i tre punti

$$A = (0,1,0),\ B = (1,1,1),\ C = (2,0,1)$$

in $\mathbf{R}^3$

(i) Verificare che i tre punti non sono allineati;

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane dell'unica circonferenza passante per i 3 punti.

Svolgimento: (i) Il determinante della matrice che ha per colonne le coordinate dei tre punti ha determinante diverso da zero. percio' i tre punti non possono essere allineati. (ii) Il centro C della circonferenza giacera' sul piano π passante per i tre punti e sara' l'intersezione, in tale piano π, degli assi dei segmenti per esempio $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Il raggio, sara' determinato per esempio da $r = d(C, A)$. L'equazione cartesiana del piano per i tre punti e'

$$\pi : \quad x + y - z = 1.$$

Se s e' l'asse del segmento $\overline{AB}$, allora s si ottiene intersecando π con il piano β, ortogonale al vettore direttore della retta per A e per B, che e' $= (1, 0, 1)$, e passante per il punto medio di $\overline{AB}$, che denotiamo con $M = (1/2, 1, 1/2)$. Percio' β ha equazione cartesiana $x + z - 1 = 0$ e quindi s ha equazioni cartesiane

$$x + y - z - 1 = x + z - 1 = 0.$$

Analogamente, troviamo che l'equazione della retta s', asse del segmento $\overline{BC}$ e'

$$x + y - z - 1 = x - y - 1 = 0.$$

Percio' $C = s \cap s' = (1, 0, 0)$ e quindi $r = d(A, C) = \sqrt{2}$. In definitiva, l'equazione della circonferenza cercata e':

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 - 2 = x + y - z - 1 = 0.$$