Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, E)$ per $\mathbf{R}^2$ con coordinate cartesiane (x, y).

1. Sia $\underline{u} = (-1, 1)$ un vettore di $\mathbf{R}^2$. Determinare tutti i vettori $\underline{x}$ che sono ortogonali ad $\underline{u}$ e che hanno norma uguale a 2.

   Svolgimento: $\underline{x} = (x_1, x_2)$ e' tale che $0 = \underline{u} \cdot \underline{x} = x_2 - x_1$; percio' $\underline{x} = (\alpha, \alpha)$. Inoltre $||\underline{x}|| = 2$ implica $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Percio', i vettori cercati sono
   $$\underline{x} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ oppure } \underline{x} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

2. Determinare tutte le rette passanti per $P = (-1, 2)$ e formanti con l'asse x un angolo convesso pari a $\pi/3$. Determinare i due angoli convessi fra le due rette ottenute.

   Svolgimento: Sia $\underline{r} = (l, m)$ un vettore direttore di una delle rette da determinare. Allora:
   $$1/2 = cos(\pi/3) = (\underline{r} \cdot (\pm\underline{e}_1))/||\underline{r}|| \, ||\underline{e}_1|| = (\pm l)/\sqrt{l^2 + m^2},$$
   che determina
   $$l = \pm(1/\sqrt{3})m.$$
   Otteniamo percio', a meno di proporzionalita', due vettori direttori:
   $$\underline{r}_1 = (1, \sqrt{3}) \text{ e } \underline{r}_2 = (-1, \sqrt{3}).$$
   Le equazioni cartesiane delle rette cercate sono rispettivamente:
   $$r_1 : \sqrt{3}x - y + 2 + \sqrt{3} = 0 \text{ e } r_2 : \sqrt{3}x + y - 2 + \sqrt{3} = 0.$$
   Ora
   $$cos(\theta(r_1, r_2)) = cos(\theta(\pm\underline{r}_1, \underline{r}_2)) = \pm 1/2,$$
   quindi $\theta = \{\pi/3, 2\pi/3\}$, a seconda di come sono orientate le due rette.

3. Siano assegnate le rette $\underline{s}_1$, di equazioni parametriche
   $$x = 1 - 2t, y = 2t, \quad t \in \mathbf{R},$$
   $\underline{s}_2$, di equazione cartesiana
   $$x - 2y + 1 = 0$$
   e $\underline{s}_3$, di equazione cartesiana
   $$2x + y - 2 = 0.$$
   (i) Determinare un'equazione cartesiana di $\underline{s}_1$;
   (ii) Determinare un'equazione cartesiana della retta $\underline{r}$ parallela ad $\underline{s}_1$ e passante per $P_0 = \underline{s}_2 \cap \underline{s}_3$;
   (iii) Determinare le equazioni parametriche della retta $\underline{n}$ per $P_1 = \underline{s}_1 \cap \underline{s}_2$ e perpendicolare a $\underline{s}_3$;

(iv) Verificare che la retta per i punti

$$Q_1 = (1, -1/4) \; e \; Q_2 = (2, 1/4)$$

e' parallela a $\underline{s}_2$. Tale retta coincide con $\underline{s}_2$?

Svolgimento: (i) Poiche' $y = 2t$, un' equazione cartesiana e' $x = 1 - y$, cioe' $x + y - 1 = 0$. (ii) Per determinare il punto P_0 basta risolvere il sistema lineare non omogeneo

$$x - 2y + 1 = 2x + y - 2 = 0$$

che ha come soluzione

$$x = 3/5, \; y = 4/5.$$

Un vettore direttore della retta $\underline{s}_1$ e' $(-2, 2)$, equivalentemente $(-1, 1)$. Quindi, l'equazione cartesiana della retta che si vuole determinare sara' data da:

$$5x + 5y - 7 = 0.$$

(iii) Per trovare le coordinate di P_1, basta sostituire nell'equazione di $\underline{s}_2$, $x = 1 - 2t$ e $y = 2t$, che determina $t = 1/3$, cioe' $x = 1/3, \; y = 2/3$. Un vettore normale a $\underline{s}_3$ e' $(2, 1)$, come si deduce direttamente dall'equazione cartesiana di s_3. Percio' la retta cercata e' quella che passa per P_1 e che ha parametri direttori $(2, 1)$. (iv) Un vettore direttore della retta per Q_1 e Q_2 e' dato dal vettore che ha come coordinate la differenza delle coordinate di Q_2 con quelle di Q_1, cioe' $(1, 1/2)$. Quindi, un vettore direttore e' anche $(2, 1)$, che e' un vettore direttore anche di $\underline{s}_2$. Ora pero' la retta per Q_1 e Q_2 e' parallella a $\underline{s}_2$ ma non coincide con $\underline{s}_2$ perche', ad esempio, le coordinate di Q_1 non soddisfano l'equazione di $\underline{s}_2$.

4. Siano assegnati i punti

$$P = (1, 2), \; Q = (2, -1), \; R = (1, 0).$$

(i) Dopo aver verificato che i 3 punti formano i vertici di un triangolo T, determinare l'area del triangolo T.

(ii) Scrivere le equazioni delle mediane di T e delle tre altezze di T.

(iii) Trovare il punto Q' simmetrico di Q rispetto a P e la retta $\underline{r}$ simmetrica rispetto a P della retta $\underline{r}_{RQ}$.

Svolgimento: (i) I tre punti non sono allineati. Quindi formano i vertici di un triangolo. Per trovare l'area del triangolo T, basta calcolare con la formula delle dispense: Paragrafo 1. Geometria di $\mathbf{R}^2$ - Proposizione 1.7, a pagina 9, le aree: a_1 del triangolo con vertici O, P, Q, a_2 del triangolo con vertici O, P, R ed a_3 del triangolo con vertici O, R, Q. L'area cercata sara' data da $a_1 - a_2 - a_3$.(ii) Una mediana di un triangolo e' la retta che passa per un vertice del triangolo e per il punto medio del lato del triangolo che e' opposto a tale vertice. Per calcolare ad esempio la mediana uscente da P, basta calcolare la retta per P e per il punto medio del segmento QR, che ha coordinate $(3/2, -1/2)$. Analogamente per le altre mediane. L'altezza di un triangolo uscente da un suo vertice e' la retta passante per il vertice e perpendicolare alla retta congiungente gli altri due vertici. Percio', l'altezza di T rispetto ad esempio al vertice P e' la retta per P e perpendicolare alla retta per i due punti Q e R. Analogamente per le altre altezze. (iii) Il punto Q' e' il punto, diverso da Q, che giace sulla retta per P e Q e che' e' a distanza pari a $d(P, Q)$ da P. La retta $\underline{r}$ e' la retta parallela alla retta per R e Q e che passa per Q' trovato precedentemente.