1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (0, 1, 2)$ sul sottospazio W generato dai vettori ortogonali $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$.

   Svolgimento: Il vettore richiesto w e' la somma dei vettori, $\pi_{v_1}(v)$ e $\pi_{v_2}(v)$, che sono rispettivamente le proiezioni ortogonali di v su v_1 e su v_2, cioe':

   $$w = (v \cdot v_1/||v_1||)v_1 + (v \cdot v_2/||v_2||)v_2 = (1/2, 1/2, 2).$$

   Si verifica facilmente che il vettore $t := v - \pi_{v_1}(v) - \pi_{v_2}(v)$ e' ortogonale a v_1 e a v_2 e che $Span(\{v_1, v_2, t\}) = Span(\{v_1, v_2, t\})$.

2. Sia $\mathbf{R}^4$ munito del prodotto scalare standard.
   (a) Determinare il complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio cosi' definito:

   $$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0\}.$$

   (b) Verificare esplicitamente che $\mathbf{R}^4 = U \oplus U^\perp$.

   Svolgimento: (a) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U, cioe':

   $$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0.$$

   Per esempio, una base di U e' data da $u = (1, 0, 1, 0)$. Allora, $U^\perp$ e' costitutito da tutti i vettori $t = (x_1, \ldots, x_4)$ tale che $t \cdot u = 0$, cioe' tali che risulti:

   $$x_1 + x_3 = 0.$$

   Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U. Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da

   $$u_1 = (1, 0, -1, 0), \;\; u_2 = (0, 1, 0, 0), \;\; u_3 = (0, 0, 0, 1).$$

   Pertanto $U^\perp = Span(\{u_1, u_2, u_3\})$ e ritroviamo che ha dimensione 3, cioe' e' un iperpiano in $\mathbf{R}^4$. (b) Visto che il determinante della matriche che ha per colonne, rispettivamente, le coordinate di u, u_1, u_2 ed u_3, ha determinante $1 \neq 0$, allora l'insieme $\{u, u_1, u_2, u_3\}$ forma una base di $\mathbf{R}^4$, che verifica che $\mathbf{R}^4 = U \oplus U^\perp$, dato che necessariamente $U \cap U^\perp = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, si consideri il vettore $u_0 = (1, 2, -1)$. Sia

   $$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

   l'applicazione cosi' definita:

   $$T(v) := v \times u_0, \;\; \forall \;\; v \in \mathbf{R}^3,$$

   dove il simbolo $\times$ denota il prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$.
   (a) Verificare che T e' un operatore lineare;

(b) determinare la matrice A rappresentativa di T rispetto alla base canonica E di $\mathbf{R}^3$;
(c) calcolare gli autovalori di T ed i relativi autospazi;
(d) la matrice A risulta diagonalizzabile?

Svolgimento: (a) In base alla linearita' del prodotto vettoriale di $\mathbf{R}^3$, per ogni $x, y \in \mathbf{R}^3$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ si ha:

$$T(\lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y) \times u_0 = \lambda(x \times u_0) + \mu(y \times u_0) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

(b) Dobbiamo determinare $T(e_i)$, dove e_i e' l' i-esimo vettore della base canonica, $1 \leq i \leq 3$. Allora,

$$T(e_1) = e_2 + 2e_3, \;\; T(e_2) = -e_1 - e_3, \;\; T(e_3) = -2e_1 + e_2.$$

Pertanto, in base canonica E, T ha matrice rappresentativa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) L'operatore T ha polinomio caratteristico dato da

$$P_A(x) = det(A - xI_3) = -x(x^2 + 6).$$

L'unico autovalore reale di A e' ottenuto per $x = 0$, ed e' un autovalore semplice, cioe' di molteplicita' algebrica e quindi geometrica 1. L'autospazio associato sara' quindi di dimensione 1 ed e' esattamente il sottospazio dato da $Span(u_0)$, dato che $T(u_0) = u_0 \times u_0 = 0$. (d) La matrice A non puo' essere quindi diagonalizzabile.

4. Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, siano assegnati i punti

$$p = (1, 2), \;\; q = (2, -1), \;\; r = (1, 0).$$

Dopo aver verificato che i 3 punti formano i vertici di un triangolo T, determinare l'area del triangolo T.

Svolgimento: I tre punti non sono allineati. Quindi formano i vertici di un triangolo. Per trovare l'area del triangolo T, basta considerare l'origine $o = (0, 0, 0)$ e calcolare le aree: a_1 del triangolo con vertici o, p, q, a_2 del triangolo con vertici o, p, r ed a_3 del triangolo con vertici o, r, q. L'area cercata sara' data da $a_1 - a_2 - a_3$.

5. Nello spazio cartesiano $\mathbf{R}^3$ siano assegnati i punti:

$$A_1 = (-1/5, -2/5, 0), \;\; A_2 = (1, -1, 1/2), \;\; A_3 = (-1, 0, 1).$$

Calcolare il volume del tetraedro di vertici $O = (0, 0, 0), \; A_1, \; A_2, \; A_3$.

Svolgimento: Il volume v del tetraedro e' la sesta parte del volume w del parallelepipedo determinato dai vettori $A_1A_2 := OA_2 - OA_1$, $A_1A_3 := OA_2 - OA_1$ e $A_1O = -OA_1$. Abbiamo

$$A_1O = (1/5, 2/5, 0), \;\; A_1A_2 = (6/5, 3/5, 1/2), \;\; A_1A_3 = (-4/5, 2/5, 1).$$

Il volume w del parallelepipedo e' determinato dal valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori in questione, cioe'

$$w = |A_1A_2 \times A_1A_3 \cdot A_1O| = |det \begin{pmatrix} 6/5 & -4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}|$$

quindi il volume v richiesto e' 1/6 di w cioe' 2/75.

6. In $\mathbf{R}^2$, si considerino i vettori $v = (1, 2)$ e $w = (-1, -1)$.
   (a) Calcolare l'orientazione della coppia ordinata $\{v,\ w\}$, i.e. $Or(v, w)$;
   (b) Denotiamo con S_0 la riflessione rispetto all'asse x_1. Calcolare $Or(S_0(v), S_0(w))$;

   Svolgimento: (a) L'orientazione della coppia ordinata si determina considerando il determinante della matrice 2×2 che ha come I colonna le coordinate di v e come II colonna le coordinate di w. Si ottiene quindi $Or(v, w) = 1$, percio' la coppia ordinata e' orientata positivamente; (b) Osserviamo che $S_0((x, y)) = (x, -y)$. Percio'$Or(S_0(v), S_0(w)) = -1 = -Or(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, cioe' la coppia ottenuta non e' equi-orientata con la base canonica.