GEOMETRIA e ALGEBRA (II Ciclo - Ing. Elettronica) - Docente: F. Flamini

SVOLGIMENTO II ESONERO

Roma, 22 Febbraio 2007, ore 9:00 – 11,00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare ESCLUSIVAMENTE QUESTI FOGLI.

1. Nello spazio cartesiano $\mathbf{R}^3$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), sia $\pi \subset \mathbf{R}^3$ il piano di equazione cartesiana:

$$\pi : 2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

e sia $l \subset \mathbf{R}^3$ la retta di equazioni cartesiane

$$l : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

(i) Scrivere le formule di riflessione rispetto a π. **[6 punti]**.

(ii) Determinare le equazioni cartesiane della retta $m \subset \mathbf{R}^3$, che e' la retta ottenuta per riflessione della retta l rispetto al piano π. **[4 punti]**.

Svolgimento: (i) Sia $p = (a, b, c)$ il punto generico di $\mathbf{R}^3$. Un vettore normale al piano π e' il vettore $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$. Pertanto la retta r, passante per p e perpendicolare a π, ha equazione parametrica vettoriale

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{n},$$

e quindi equazioni parametriche scalari

$$x_1 = a + 2t, \ \ x_2 = b - t, \ \ x_3 = c + t.$$

Se imponiamo l'intersezione di r con π, si ottiene il valore

$$t_0 = (4 + b - c - 2a)/6.$$

Quindi, se $S_\pi(p)$ denota il simmetrico di p rispetto a π, esso si ottiene come punto sulla retta r, corrispondente al valore del parametro $2t_0$, cioe'

$$S_\pi(p) = (a, b, c) + ((4 + b - c - 2a)/3) \ \ (2, -1, 1).$$

In definitiva, le formule di simmetria rispetto a π sono

$$S_\pi((a, b, c)) = (-a/3 + 2b/3 - 2c/3 + 8/3, \ 2a/3 + 2b/3 + c/3 - 4/3, \ -2a/3 + b/3 + 2c/3 + 4/3).$$

(ii) Prendiamo due punti su l, ad esempio $R = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, -1, -1)$. Dalle formule di simmetria precedenti, si ha che

$$S_\pi(R) = (5/3, -1/3, 4/3) \quad S_\pi(Q) = (8/3, -7/3, 5/3).$$

Percio', un vettore direttore di m e' dato da

$$S_\pi(Q) - S_\pi(R) = (1, -2, -1).$$

Allora, l'equazione parametrica vettoriale di m e' data da $\mathbf{x} = (5/3, -1/3, 4/3) + t(1, -2, -1)$ e quindi le equazioni parametriche scalari sono

$$x_1 = 5/3 + t, \ \ x_2 = -1/3 - 2t, \ \ x_3 = 4/3 - t.$$

Queste determinano le equazioni cartesiane di m che sono, ad esempio

$$m : \begin{cases} x_1 + x_3 - 3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \end{cases}.$$

2. Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2), e' data la conica euclidea di equazione cartesiana

$$C : \; 7x_1^2 - 10\sqrt{3}x_1x_2 - 3x_2^2 + 12\sqrt{3}x_1 - 12x_2 - 12 = 0.$$

(i) Ridurre la conica C a forma canonica metrica D. Stabilire la classificazione metrica di C e trovare esplicitamente l'equazione di D e l'isometria che trasforma C in D. **[6 punti]**.

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti della conica C. **[4 punti]**.

(iii) Disegnare C nel riferimento (x_1, x_2) di partenza. **[2 punt1]**.

Svolgimento: (i) La matrice simmetrica associata alla parte omogenea di grado due della conica C e' la matrice

$$Q := \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiche' $det(Q) = -96 < 0$, allora C appartiene alla famiglia delle iperboli. Il polinomio caratteristico di Q e'

$$det(Q - tI) = t^2 - 4t - 96$$

che ha soluzioni

$$t_1 = 12 \quad t_2 = -8.$$

Il primo autovettore, relativo al primo autovalore $t_1 = 12$, si determina considerando il sistema

$$\begin{cases} 7\alpha - 5\sqrt{3}\beta = 12\alpha \\ -5\sqrt{3}\alpha - 3\beta = 12\beta \end{cases}$$

che fornisce l'autovettore $(\sqrt{3}, -1)$. Quindi, per il teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ costituita da autovettori di Q e' ad esempio la base

$$\mathbf{f}_1 = (\sqrt{3}/2, -1/2), \quad \mathbf{f}_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$$

scelta in modo tale che sia orientata positivamente. La matrice che trasforma i vettori della base canonica nei vettori di questa nuova base ortonormale e'

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

che e' pertanto ortogonale. La trasformazione di coordinate e' quindi

$$\mathbf{x} = M\mathbf{y},$$

cioe' $x_1 = \sqrt{3}/2y_1 + 1/2y_2, \quad x_2 = -1/2y_1 + \sqrt{3}/2y_2$. Sostituendo nell'equazione di C, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano Q, si trova rapidamente che l'equazione della conica C in tali coordinate diventa

$$12y_1^2 - 8y_2^2 + 24y_1 - 12 = 0.$$

Dividendo tutta l'equazione per 4, studiamo quindi la conica

$$C' : 3y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_1 - 3 = 0.$$

Poiche' il coefficiente di y_2 e' nullo, consideriamo la traslazione

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{c}$$

dove $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ e $\mathbf{c} = (\alpha, 0)$ con α da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di C' si ottiene

$$3z_1^2 - 2z_2^2 + 6(1 + \alpha)z_1 + 3\alpha^2 + 6\alpha - 3 = 0.$$

Scegliendo $\alpha = -1$ allora l'equazione della conica diventa

$$3z_1^2 - 2z_2^2 = 6$$

e quindi

$$\mathbf{c} = (-1, 0).$$

Dividendo tutto per 6, si ottiene che C e' un'iperbole generale a punti reali e che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) e'

$$D: \quad z_1^2/2 - z_2^2/3 = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta C in D e' data da

$$\mathbf{x} = M(\mathbf{z} + \mathbf{c}) = M\mathbf{z} + M\mathbf{c}.$$

Visto che $M\mathbf{c} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$, le equazioni della isometria sono

$$x_1 = \sqrt{3}/2z_1 + 1/2z_2 - \sqrt{3}/2, \quad x_2 = -1/2z_1 + \sqrt{3}/2z_2 + 1/2.$$

(ii) Gli asintoti della forma canonica D sono le rette di equazioni cartesiane

$$\sqrt{3}z_1 - \sqrt{2}z_2 = 0, \quad \sqrt{3}z_1 + \sqrt{2}z_2 = 0$$

il centro di simmetria e' il punto $(z_1, z_2) = (0, 0)$, l'asse di simmetria intersecato da D e' $z_2 = 0$ mentre l'asse di simmetria non intersecato da D e' $z_1 = 0$.
Dalle formule $\mathbf{x} = M\mathbf{z} + M\mathbf{c}$, troviamo che il centro di simmetria di C e' quindi $\mathbf{x} = M\mathbf{c} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ che si ottiene per il valore di $\mathbf{z} = (0, 0)$. Sempre dalla relazione precedente e ricordando che M e' una matrice ortogonale, si ottiene la relazione inversa

$$\mathbf{z} = M^t\mathbf{x} - \mathbf{c}$$

cioe' $z_1 = \sqrt{3}/2x_1 - 1/2x_2 + 1, \quad z_2 = 1/2x_1 + \sqrt{3}/2x_2$.Pertanto, i due asintoti di C sono, rispettivamente,

$$(3 - \sqrt{2})x_1 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})x_2 + 2\sqrt{3} = 0, \quad (3 + \sqrt{2})x_1 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})x_2 + 2\sqrt{3} = 0.$$

Analogamente, l'asse di simmetria che non viene intersecato da C e'

$$\sqrt{3}x_1 - x_2 + 2 = 0,$$

mentre quello che viene intersecato da C e'

$$x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0.$$

(iii) Per precisamente C basta vedere quali sono le coordinate (x_1, x_2) dei punti che corrispondono ai punti, che nel riferimento (z_1, z_2), avevano coordinate $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-\sqrt{2}, 0)$; infatti questi erano i punti in cui la conica D intersecava il suo asse (reale) di simmetria. Tali punti, nel riferimento iniziale (x_1, x_2) hanno coordinate, rispettivamente,

$$(\sqrt{3}/2(\sqrt{2} - 1), 1/2(1 - \sqrt{2})), \quad (-\sqrt{3}/2(\sqrt{2} + 1), 1/2(1 + \sqrt{2})).$$

3. Nello spazio cartesiano $\mathbf{R}^3$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), sia data la quadrica Q di equazione cartesiana

$$Q: \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2 = 0.$$

(i) Riconoscere il tipo di quadrica, cioe' classificarla dal punto di vista affine. **[6 punti]**.

(ii) Scrivere, in opportune coordinate (z_1, z_2, z_3), la forma canonica affine di Q. **[2 punti]**.

Svolgimento: (i) La matrice simmetrica associata alla parte omogenea di grado due della quadrica Q e' la matrice

$$A_Q := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$det(A_Q) = 0 \quad rg(A_Q) = 2.$$

Se calcoliamo il polinomio caratteristico di A_Q, si ha $P_{A_Q}(t) = det(A_Q - tI) = t^2 - t^3 + 2t$. Percio', le soluzioni di tale polinomio sono

$$0, \;\; 2, \;\; -1.$$

Quindi, i due autovalori non-nulli di A_Q hanno segno opposto. Dalla classificazione affine delle quadriche si ha percio' che Q e' o

a) un paraboloide iperbolico (o sella), oppure

b) un cilindro iperbolico, oppure

c) due piani coincidenti.

Procediamo per esclusioni. Se intersechiamo la quadrica Q con il piano di equazione

$$x_1 = 0,$$

troviamo come curva intersezione

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x_2 = 1 \end{cases}$$

che e' una retta semplice per la quadrica Q. Percio' la possibilita' c) si esclude. Sia ora $p = (0, 0, 0) \in Q$. Vogliamo calcolare il piano tangente a Q nel punto p. Se $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2$ troviamo che il gradiente di f e'

$$(-2x_1 - 2x_2 + 2x_3, -2x_1 - 4, 2x_1).$$

Tale gradiente, valutato in p e' il vettore $(0, -4, 0)$. Percio', il piano tangente voluto e'

$$x_2 = 0.$$

Intersecando Q con tale piano tangente si ha

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1^2 + 2x_1x_3 = 0 \end{cases}$$

che e' una curva formata dalla seguente coppia di rette per l'origine

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Si deduce quindi che l'unica possibilita' per Q e' a). Infatti se Q fosse un cilindro iperbolico, il piano tangente in un qualsiasi suo punto q e' costante lungo tutta la retta generatrice del cilindro passante per q, e quindi la curva intersezione sarebbe la stessa generatrice contata con molteplicita' 2. Poiche' la curva intersezione invece e' una coppia di rette, ciascuna semplice, ed incidenti nel punto p, la possibilita' b) deve per forza escludersi.

(ii) Dal punto precedente, si deduce immeditamente che la forma canonica affine di Q e', nelle opportune coordinate,

$$z_1^2 - z_2^2 + z_3 = 0.$$