Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria Elettronica

Quarto Appello del corso di **Geometria e Algebra**
II Parte - Docente F. Flamini, Roma, 24/09/2007

SVOLGIMENTO COMPITO IV APPELLO / RECUPERI

LEGENDA

Recupero I Parte: svolgere esercizi 1), 2) e 3).
Recupero II Parte: svolgere esercizi 4), 5) e 6).
IV Appello: svolgere esercizi 2), 4) e 6).

Esercizio 1. [10 punti] Sia $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard.
(a) Determinare il complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio cosi' definito:

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0\}.$$

[6 punti]
(b) Verificare esplicitamente che $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$. [4 punti]
Svolgimento: (a) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U, cioe':

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0.$$

Per esempio, una base di U e' data da $u = (1, 0, 1, 0)$. Allora, $U^\perp$ e' costitutito da tutti i vettori $t = (x_1, \ldots, x_4)$ tale che $t \cdot u = 0$, cioe' tali che risulti:

$$x_1 + x_3 = 0.$$

Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U. Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da

$$u_1 = (1, 0, -1, 0), \;\; u_2 = (0, 1, 0, 0), \;\; u_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Pertanto $U^\perp = Span(\{u_1, u_2, u_3\})$ e ritroviamo che ha dimensione 3, cioe' e' un iperpiano in $\mathbb{R}^4$. (b) Visto che il determinante della matriche che ha per colonne, rispettivamente, le coordinate di u, u_1, u_2 ed u_3, ha determinante $1 \neq 0$, allora l'insieme $\{u, u_1, u_2, u_3\}$ forma una base di $\mathbb{R}^4$, che verifica che $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$, dato che necessariamente $U \cap U^\perp = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Esercizio 2. [10 punti] Siano assegnate le rette $\underline{s}_1$, di equazioni parametriche

$$x = 1 - 2t, y = 2t, \;\; t \in \mathbb{R},$$

$\underline{s}_2$, di equazione cartesiana

$$x - 2y + 1 = 0$$

e $\underline{s}_3$, di equazione cartesiana

$$2x + y - 2 = 0.$$

(i) Determinare un'equazione cartesiana di $\underline{s}_1$ [1 punto];
(ii) Determinare un'equazione cartesiana della retta $\underline{r}$ parallela ad $\underline{s}_1$ e passante per $P_0 = \underline{s}_2 \cap \underline{s}_3$ [3 punti];
(iii) Determinare le equazioni parametriche della retta $\underline{n}$ per $P_1 = \underline{s}_1 \cap \underline{s}_2$ e perpendicolare a $\underline{s}_3$ [3 punti];
(iv) Verificare che la retta per i punti

$$Q_1 = (1, -1/4) \; e \; Q_2 = (2, 1/4)$$

e' parallela a $\underline{s}_2$. Tale retta coincide con $\underline{s}_2$? [3 punti]
Svolgimento: (i) Poiche' $y = 2t$, un'equazione cartesiana e' $x = 1 - y$, cioe' $x + y - 1 = 0$. (ii) Per determinare il punto P_0 basta risolvere il sistema lineare non omogeneo

$$x - 2y + 1 = 2x + y - 2 = 0$$

che ha come soluzione

$$x = 3/5, \; y = 4/5.$$

Un vettore direttore della retta $\underline{s}_1$ e' $(-2, 2)$, equivalentemente $(-1, 1)$. Quindi, l'equazione cartesiana della retta che si vuole determinare sara' data da:

$$5x + 5y - 7 = 0.$$

(iii) Per trovare le coordinate di P_1, basta sostituire nell'equazione di $\underline{s}_2$, $x = 1-2t$ e $y = 2t$, che determina $t = 1/3$, cioe' $x = 1/3, \; y = 2/3$. Un vettore normale a $\underline{s}_3$ e' $(2, 1)$, come si deduce direttamente dall'equazione cartesiana di s_3. Percio' la retta cercata e' quella che passa per P_1 e che ha parametri direttori $(2, 1)$. (iv) Un vettore direttore della retta per Q_1 e Q_2 e' dato dal vettore che ha come coordinate la differenza delle coordinate di Q_2 con quelle di Q_1, cioe' $(1, 1/2)$. Quindi, un vettore direttore e' anche $(2, 1)$, che e' un vettore direttore anche di $\underline{s}_2$. Ora pero' la retta per Q_1 e Q_2 e' parallela a $\underline{s}_2$ ma non coincide con $\underline{s}_2$ perche', ad esempio, le coordinate di Q_1 non soddisfano l'equazione di $\underline{s}_2$.

Esercizio 3. [10 punti] Sono assegnate la retta

$$r : \begin{cases} x - y & = 1 \\ z & = 0, \end{cases} \qquad \text{ed il piano } \; \Pi : x + 2y - z = 0.$$

(i) Determinare il piano Λ contenente r e normale a Π [3 punti];
(ii) Determinare la retta s, proiezione ortogonale di r su Π [3 punti];
(iii) Determinare l'angolo convesso $\theta(r, s)$ tra r ed s [4 punti];
Svolgimento: (i) Il piano Π ha vettore normale $\underline{n} = (1, 2, -1)$. Sia

$$\lambda(x - y - 1) + \mu z = 0$$

l'equazione cartesiana del fascio di piani di asse la retta r, con λ e μ numeri reali variabili, non entrambi nulli. Imponendo il parallelismo con $\underline{n}$, determiniamo $\lambda - 2\lambda - \mu = 0$, i.e. $\mu = -\lambda$. Percio' il piano Λ ha equazione cartesiana $x-y-z=1$.
(ii) La retta s e' l'intersezione di Π con Λ, percio':

$$s : \begin{cases} x - y - z &= 1 \\ x + 2y - z &= 0, \end{cases} .$$

(iii) La retta r ha vettore direttore $\underline{r} = (1,1,0)$, la retta s ha vettore direttore $\underline{s} = (1,0,1)$. Percio',

$$cos(\theta(r,s)) = \pm \frac{\underline{r} \cdot \underline{s}}{||\underline{r}|| ||\underline{s}||} = \pm \frac{1}{2},$$

i.e. $\theta(r,s)$ e' o $\frac{\pi}{3}$ oppure $\frac{2}{3}\pi$, a seconda di come sono orientate le due rette.

Esercizio 4. [10 punti] Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2), e' data la conica euclidea C di equazione cartesiana

$$C : \; x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 = 0.$$

(i) Verificare che C e' una parabola semplicemente degenere. **[8 punti]**
(ii) Trovare esplicitamente l'equazione dell'asse della parabola C. **[2 punti]**.
Svolgimento: La matrice della parte omogenea di grado 2 della conica e'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

percio' ha rango 1. Quindi la conica, o e' una retta doppia (cioe' una parabola doppiamente degenere) oppure e' una coppia di rette parallele (cioe' una parabola semplicemente degenere) oppure una parabola (generale). Una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$, costituita da autovettori per A e' data da

$$\{v_1 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), \; v_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\},$$

dove il primo autovettore e' relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ mentre il secondo e' relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$. Scriviamo allora

$$x_1 = (\sqrt{2}/2)y_1 + (\sqrt{2}/2)y_2, \quad x_2 = (\sqrt{2}/2)y_1 - (\sqrt{2}/2)y_2.$$

Sostituendo nell'equazione della conica, otteniamo:

$$y_2^2 - 2\sqrt{2}y_2 = 0.$$

Questa e' una parabola semplicemente degenere, determinata dalle due rette parallele

$$y_2 = 0 \quad \text{e} \quad y_2 = 2\sqrt{2}.$$

(ii) L'asse della parabola nelle coordinate (y_1, y_2) e' ovviamente $y_2 = \sqrt{2}$. Pertanto, per trovare l'equazione cartesiana dell'asse di C, basta considerare l'isometria inversa

$$y_1 = (\sqrt{2}/2)x_1 - (\sqrt{2}/2)x_2 \quad y_2 = (\sqrt{2}/2)x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2.$$

L'asse della parabola iniziale e', nelle vecchie coordinate, dato da

$$x_1 + x_2 = 2.$$

Esercizio 5. [10 punti] Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$, sia π_1 il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

e sia π_2 il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

Riflettere il piano π_1 rispetto al piano π_2, calcolando esplicitamente un'equazione cartesiana del piano $S_{\pi_2}(\pi_1)$ che e' il piano riflesso di π_1 rispetto a π_2.
Svolgimento: Uno dei modi per calcolare il piano riflesso e' descritto qui di seguito. Consideriamo prima l'intersezione dei piani π_1 e π_2. Questa e' una retta l di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Scegliamo ora un punto P che stia su π_1 ma non su l, ad esempio $P = (1, 0, 0)$. Poi, consideriamo la retta m che passa per P e che e' ortogonale a π_2. Tale retta ha equazioni parametriche:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il valore del parametro $t = 0$ corrisponde al punto P, mentre il punto di intersezione $m \cap \pi_2$ corrisponde al valore ottenuto da $(1 + t) + t + 2(2t) = 0$, cioe' $t = -1/6$. Il punto P', riflesso di P rispetto a π_2, corrisponde quindi la valore di $t = -1/3$. Percio' $P' = (2/3, -1/3, -2/3)$.

Il piano cercato $S_{\pi_2}(\pi_1)$ e' quindi il piano che passa per la retta l e per il punto P'.

Scrivendo l'equazione del fascio di piani di asse la retta l ed imponendo il passaggio per P' si ottiene l'equazione cartesiana del piano cercato, che e'

$$x_2 - 2x_3 = 1.$$

Esercizio 6. [10 punti] Sia $RC(O, \mathcal{E})$ il riferimento usuale per $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z). Stabilire la natura delle quadrica euclidea Q, di equazione cartesiana

$$x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0. \quad [6 \text{ punti}]$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine [4 punti].

Svolgimento: Un modo per procedere e' osservare che l'equazione di Q si puo' scrivere anche come

$$(x+y)^2 - 3(x+y) + 2 = 0.$$

Ponendo $t := x + y$ si ottiene un'equazione di secondo grado in t,

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Tale equazione ha le due soluzioni $t = 1, \quad t = 2$. Cio' significa che il polinomio in t si fattorizza in

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$$

e quindi, anche

$$(x+y)^2 - 3(x+y) + 2 = (x+y-1)(x+y-2) = 0.$$

Questo significa che la quadrica Q e' costituita da due piani paralleli. Ne segue che la sua forma canonica affine, in un'opportuno riferimento, sara'

$$X_1^2 = 1.$$

Si puo' invece calcolare il rango della matrice A della quadrica Q. Si vede allora che ha rango 1. Percio', dalla classificazione, o la quadrica e' priva di punti reali, o e' un cilindro parabolico, o e' costituita da un piano contato 2 volte oppure e' costituita da due piani paralleli. Facilmente si vede che Q contiene il punto $p = (1, 1, 0)$. Q non puo' essere un cilindro parabolico, dato che il piano tangente a Q nel punto p ha equazione $x + y - 2 = 0$, che messo a sistema con l'equazione di Q, determina la relazione $0 = 0$ invece di una retta contata 2 volte. Percio', per escludere che sia un piano contato 2 volte, basta intersecare con una retta generica dello spazio e vedere che si trovano 2 punti di intersezione distinti e non un punto contato 2 volte.