Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria Elettronica

Secondo Appello del corso di **Geometria e Algebra**
II Parte - Docente F. Flamini, Roma, 02/03/2007

SVOLGIMENTO COMPITO II APPELLO / RECUPERI

LEGENDA

Recupero I Parte: svolgere esercizi 1), 2) e 3).
Recupero II Parte: svolgere esercizi 4), 5) e 6).
II Appello: svolgere esercizi 2), 4) e 6).

Esercizio 1. [10 punti] Sia $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard. Sia

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0\}$$

il sottospazio definito in equazioni cartesiane.
(i) Determinare una base ortonormale di U.
(ii) Determinare il complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio U, ed una sua base ortonormale.
Svolgimento: (i) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U, cioe':

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0.$$

Per esempio, una base di U e' data da $u = (1, 0, 1, 0)$. Quindi una base ortonormale e' data da $f_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$.
(ii) $U^\perp$ e' costituito da tutti i vettori $\underline{t} = (x_1, \ldots, x_4)$ tali che $\underline{t} \cdot \underline{u} = 0$, $\forall\ \underline{u} \in U$, cioe' tali che risulti:

$$x_1 + x_3 = 0.$$

Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U. Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da

$$u_2 = (1, 0, -1, 0), \;\; u_3 = (0, 1, 0, 0), \;\; u_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Pertanto $U^\perp = Span(\{u_1, u_2, u_3\})$ e ritroviamo che ha dimensione 3, cioe' e' un iperpiano in $\mathbb{R}^4$. La base ortonormale si puo' estrarre direttamente dalla precedente. Infatti basta prendere

$$f_2 = u_2/||u_2||, \;\; f_3 = u_3, \;\; f_4 = u_4.$$

Esercizio 2. [10 punti] Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ e con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), sia data la retta r

di equazioni cartesiane

$$r : x_1 - x_2 = x_3 - 1 = 0.$$

Determinare tutte le rette s, aventi vettore direttore

$$(1, 0, -1)$$

e tali che

$$d(r, s) = 1.$$

Stabilire inoltre se queste rette sono in numero finito o variano in un opportuno fascio.

Svolgimento: Una retta s siffatta e' della forma

$$x_2 - b = x_1 + x_3 - a - c = 0,$$

dove (a, b, c) e' il generico punto dello spazio.

Imporre che una tale s sia a distanza 1 da r determina

$$a - b + c = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Sostituendo tale eguaglianza nella equazione precedente, si ottengono 2 famiglie di rette:

$$s_b : \quad x_2 - b = x_1 - x_2 + x_3 - 1 + \sqrt{3} = 0$$

e

$$s'_b : \quad x_2 - b = x_1 - x_2 + x_3 - 1 - \sqrt{3} = 0.$$

Ciascuno di essi e' un fascio di rette parallele nel piano opportuno dato dalla seconda equazione.

Esercizio 3. [10 punti] Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ e con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), determinare l'equazione cartesiana della sfera passante per i punti $P_1 = (2, -1, 3)$ e $P_2 = (-1, 2, 1)$ ad avente centro sulla retta

$$r : \quad x_1 - 3x_3 + 1 = x_2 - x_3 - 2 = 0.$$

Svolgimento: Il centro della sfera sara' l'ntersezione della retta data con il piano π passante per il punto medio del segmento P_1P_2 e ortogonale alla retta $< P_1, P_2 >$. Tale centro ha quindi coordinate $(31/8, 29/8, 13/8)$. Il raggio e' quindi dato dalla distanza da tale centro da P_1 per esempio, cioe' $r = \sqrt{1715}/8$. Quindi, l'equazione della sfera e'

$$(x_1 - 31/8)^2 + (x_2 - 29/8)^2 + (x_3 - 13/8)^2 = 1715/64.$$

Esercizio 4. [10 punti] Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane (x_1, x_2), e' data la conica euclidea C di equazione cartesiana

$$C : \; x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1 - 12x_2 + 9 = 0.$$

(i) Ridurre la conica C a forma canonica metrica D. Stabilire la classificazione metrica di C e trovare esplicitamente l'equazione di D e l'isometria che trasforma C in D. **[8 punti]**
(iii) Disegnare C nel riferimento (x_1, x_2) di partenza. **[2 punti]**.
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica associata alla parte omogenea di grado due della conica C e' la matrice

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiche' $det(Q) = 0$, allora sicuramente C apparterra' alla famiglia delle parabole. Il polinomio caratteristico di Q e'

$$det(Q - tI) = t(t - 5).$$

Tali autovalori forniscono quindi la seguente base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di Q:

$$\mathbf{f}_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad \mathbf{f}_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

La relativa trasformazione di coordinate e' quindi

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di C, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano Q, si trova rapidamente che l'equazione della conica C in tali coordinate diventa

$$5y_2^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}y_2 + 9 = 0.$$

Poiche' il coefficiente di y_1 e' nullo, consideriamo la traslazione

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{c}$$

dove $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ e $\mathbf{c} = (0, \beta)$ con β da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di C' si ottiene che con $\beta = 3/\sqrt{5}$ l'equazione della conica diventa

$$5z_2^2 = 0.$$

Dividendo tutto per 5, si ottiene che C e' una parabola doppiamente degenere e che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) e'

$$D: \quad z_2^2 = 0.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta C in D e' data da

$$x_1 = 2/\sqrt{5}z_1 - 1/\sqrt{5}z_2 - 3/5, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}z_1 + 2/\sqrt{5}z_2 + 6/5.$$

(ii) Per disegnare C, basta usare l'isometria inversa, da cui si ottiene che C e' la retta $x_1 - 2x_2 - 3 = 0$ contata due volte.

Esercizio 5. **[10 punti]** Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sia data la forma quadratica

$$Q(x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(i) Giustificare perche' esiste una base ortonormale in cui la forma quadratica Q ammette matrice simmetrica rappresentativa che e' diagonale e scrivere l'equazione di Q in tale base. **[5 punti]**
(ii) Giustificare perche' esiste una base di Sylvester di Q e determinare la forma canonica di Sylvester di Q in tale base. Calcolare inoltre la segnatura di Q.
[5 punti]
Svolgimento: (i) La base ortonormale esiste sicuramente perche' Q e' associata ad un operatore autoaggiunto. Quindi discende tutto dal Teorema spettrale. Le soluzioni del polinomio caratteristico della matrice $A = A_Q$ sono

$$0,\ 1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}.$$

Percio' nella base del Teorema Spettrale, tale forma quadratica diventa

$$Q(y_1, y_2, y_3) = (1+\sqrt{3})y_2^2 + (1-\sqrt{3})y_3^2.$$

(ii) La base ortonormale del Teorema spettrale, si trasforma, con il procedimento di Sylvester, nella base di Sylvester, in cui la forma quadratica Q diventa

$$Q(z_1, z_2, z_3) = z_2^2 - z_3^2.$$

Pertanto la forma quadratica ha rango 2 e segnatura $(1, 1)$.

Esercizio 6. [10 punti] Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ e coordinate (x_1, x_2), siano dati la retta

$$r: \ \ x_1 - 2x_2 - 1 = 0$$

e il punto

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) Scrivere le formule di riflessione rispetto ad r e le formule di rotazione di centro P_0 e angolo $\theta = \pi/2$. **[7 punti]**
(ii) Denotata con S_r e con $R_{P_0,\pi/2}$, rispettivamente, la simmetria e la rotazione determinate al punto (i), determinare le coordinate del punto $(S_r \circ R_{P_0,\pi/2})(P_1)$, dove

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{[3punti]}$$

Svolgimento: (i) Le equazioni della simmetria sono

$$x_1' = 1/5\ (3x_1 + 4x_2 + 2),\ \ x_2' = 1/5\ (4x_1 - 3x_2 - 4).$$

Le equazioni della rotazione sono

$$x_1' = 3 - x_2,\ \ x_2' = \ x_1 + 1.$$

(ii) $R_{P_0,\pi/2}(P_1) = (2, 1)$, quindi $(S_r \circ R_{P_0,\pi/2})(P_1) = S_r(2, 1) = (12/5, 1/5)$.