

[48] Data la famiglia di coniche:

$$\mathcal{F} : (y^2 - 4x - 2y + 5) + t(y^2 + 2x - 2y) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

1. verificare che $\mathcal{F}$ contiene solo parabole aventi il fuoco sulla retta $y = 1$;
2. scrivere l'equazione della parabola di $\mathcal{F}$ passante per il punto $(0, 3)$ e trovarne il vertice.

[49] Data la famiglia di coniche:

$$\mathcal{C}_a : (-1 + a^2)x^2 + 2(1 + a)xy + 2x - 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

1. determinare per quali valori del parametro a la conica $\mathcal{C}_a$ è degenera.
2. Posto $a = 1$, verificare che $\mathcal{C}_1$ è un'iperbole. Determinare la sua forma canonica e scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento usato.

[50] Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la conica:

$$(-1 + h)x^2 - 2\sqrt{3}xy + (1 + h)y^2 + 2x - \frac{\sqrt{3}(-2 + h)}{6}y = 0$$

è una parabola non degenera del piano? Determinare, rispetto ad un opportuno riferimento cartesiano, la forma canonica di tale parabola. Scrivere, inoltre, esplicitamente il cambiamento di riferimento usato.

[51] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

1. determinare, se esiste, una matrice ortogonale P (con determinante positivo) in modo tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.
2. Considerata la conica:

$$2x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0,$$

classificarla, ridurla a forma canonica e scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento usato.