

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia V uno spazio vettoriale. Dati i vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ in V , determinare la dimensione del sottospazio $U \subset V$ dato da

$$U = \text{span}\{\mathbf{u} + \mathbf{z}, \mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{z}, 2\mathbf{u} + \mathbf{z} + \mathbf{v} - \mathbf{w}\}.$$

Sol.: Poiché $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, abbiamo

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \gamma\mathbf{z} + \delta(2\mathbf{u} + \mathbf{z} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\delta = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Dunque i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{z}$, $\mathbf{u} - \mathbf{w}$, $\mathbf{z}$, $2\mathbf{u} + \mathbf{z} + \mathbf{v} - \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti e $\dim U = 4$.

2. Siano date le rette di $\mathbf{R}^3$

$$r : \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

- (a) Determinare la loro posizione reciproca (coincidenti, parallele, sghembe?).
(b) Calcolare la distanza $d(r, s)$.

Sol.: La retta r è contenuta nel piano $x_1 = -1$, mentre la retta s è contenuta nel piano $x_1 = 1$: dunque le rette non coincidono e non si incontrano. Sono parallele: infatti in forma parametrica diventano

$$r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad s : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Per calcolarne la distanza, determiniamo un piano π perpendicolare ad entrambe, ad esempio

$$\pi : x_2 - x_3 = 0.$$

La distanza cercata coincide con la distanza dei punti

$$P = \pi \cap r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \pi \cap s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

precisamente

$$d(r, s) = d(P, Q) = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}.$$

3. Sia $L: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $L(X) = MX$, con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di L .
 (b) Determinare un sottospazio proprio U di $\mathbf{R}^3$ la cui immagine abbia dimensione 2 (esibirne una base).

Sol.: (a) la matrice M ha rango 2, per cui $\dim L(\mathbf{R}^3) = 2$ ed una base di $L(\mathbf{R}^3)$ è data dai vettori

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo ha dimensione 1 ed una base di $\ker(L)$ è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: infatti $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) U è un qualunque sottospazio di $\mathbf{R}^3$ che interseca $\ker(L)$ nel solo vettore nullo. Ad esempio

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

4. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio di equazione $x = y$ e sia $h: V \rightarrow V$ l'applicazione data da

$$h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Calcolare il polinomio caratteristico di h .

Sol.: Innanzitutto osserviamo che $h\left(\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + z \\ x + z \\ 2x \end{pmatrix}$, dunque l'immagine di un elemento di V appartiene effettivamente a V . Più precisamente $V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e vale

$$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

e il suo polinomio caratteristico è dato da

$$-(1 - \lambda)\lambda - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

5. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare A^{1000} .

Sol.: La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, reali e distinti. Dunque è diagonalizzabile. Precisamente

$$M^{-1}AM = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{dove } M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $A = MDM^{-1}$ e

$$A^{1000} = MDM^{-1} \cdot \dots \cdot MDM^{-1} = MD^{1000}M^{-1}.$$

6. Siano A e B matrici ortogonali.

(a) Mostrare che AB è una matrice ortogonale.

(b) Mostrare che $\det(A) = \pm 1$.

(c) Mostrare che se λ è un autovalore reale di A , allora $\lambda = \pm 1$.

Sol.: (a) ${}^t(AB)(AB) = {}^tB {}^tAAB = {}^tB B = Id$.

(b) $\det({}^tAA) = \det(Id) = 1 = \det({}^tA) \det(A) = \det(A)^2$. Ne segue che $\det(A) = \pm 1$.

(c) Sia $\mathbf{v} \neq 0$ un autovettore di A di autovalore λ reale. Allora vale $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Inoltre A ortogonale implica $\|A\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, da cui $|\lambda| = 1$ e $\lambda = \pm 1$.