

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare tutte le rette passanti per P e parallele al piano di equazione $x - 2y + z = 7$.

2. Verificare che l'insieme $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.
Dire se S contiene o meno due vettori linearmente indipendenti, giustificando bene la risposta.

Sol.:

(c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R} \right\}$. Dati $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$ generici elementi in S e $\lambda \in \mathbf{R}$, si ha

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2(x+y) \\ (x+y) \end{pmatrix} \in S, \quad \lambda s = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ \lambda x \end{pmatrix} \in S.$$

Dunque S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

(d) $S = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Dall'espressione di S è evidente che tutti i suoi elementi sono multipli di uno dell'altro e $\dim S = 1$. Siccome la dimensione di S coincide col massimo numero di vettori linearmente indipendenti in S , si ha che S non contiene due vettori linearmente indipendenti.

3. Sia $F: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di F .

(b) Determinare una base di $F(V)$, dove V è il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$

(c) Determinare la dimensione di $(\ker F) \cap V$.

Sol.:

(a) Il nucleo di F è dato da

$$\ker F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base di $\ker F$ è data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'immagine di F è generata dalle colonne della matrice

rappresentativa di F . Una base di $F(\mathbf{R}^4)$ è data dai vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Il sottospazio V è dato da $V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e la sua immagine è data da

$$F(V) = \text{span}\left\{F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $F(V)$.

(c) $\dim(\ker F) \cap V = \dim V - \dim F(V) = 2 - 2 = 0$.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000} .

Sol.: Il polinomio caratteristico della matrice è

$$p_\lambda(A) = \lambda^2 + \lambda - 6.$$

Gli autovalori di A sono $\lambda = -3$ e $\lambda = 2$, reali e distinti, per cui A risulta diagonalizzabile. Dunque esiste C invertibile tale che $A = C \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1}$, e

$$A^{1000} = C \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1} \cdot \dots \cdot C \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1} = C \begin{pmatrix} (-3)^{1000} & 0 \\ 0 & 2^{1000} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

5. Sia π il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $5x + 4y + 3z = 0$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale su π . Determinare autovalori e autospazi della mappa lineare f .

Sol.: La proiezione ortogonale f manda in zero i punti della retta ortogonale a π e fissa i punti del piano π . Dunque π è l'autospazio di autovalore $\lambda = 1$ ed ha dimensione 2, mentre la retta $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ è il nucleo dell'applicazione, ossia l'autospazio di autovalore $\lambda = 0$.

6. Disegnare la conica in $\mathbf{R}^2$ di equazione $x^2 + 4xy - 2y^2 - 4x - 4y + 2 = 0$.

Sol. Il polinomio caratteristico della matrice A associata alla forma quadratica $x^2 + 4xy - 2y^2$ risulta

$$p_\lambda(A) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Le radici di p_λ sono $\lambda = -3$ e $\lambda = 2$, per cui la conica è di tipo iperbolico. Nel sistema di coordinate x, y la conica è questa:

