

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia data la retta $r : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ in $\mathbf{R}^3$.

- (a) Determinare un punto $P \in r$ ed equazioni cartesiane di due piani distinti che contengono r .
 (b) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per l'origine ed ortogonale ad r .

Sol.: (a) Due piani distinti che contengono r sono ad esempio i piani di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ e $x_2 - 2x_3 = 0$ (le equazioni non sono una multipla dell'altra, per cui i piani sono effettivamente distinti).

Un punto su r è ad esempio $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: le sue coordinate soddisfano entrambe le equazioni del sistema che determina r .

Il piano π passante per l'origine ed ortogonale ad r , ha equazione cartesiana $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, dove $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo ad r . Ad esempio

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusione: $-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ è un'equazione del piano cercato.

2. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in V . Determinare se i vettori $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{w} + \mathbf{v} + 2\mathbf{u}$ sono o meno linearmente indipendenti.

Sol.: Consideriamo una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{w} + \mathbf{v} + 2\mathbf{u}$ che dà il vettore nullo:

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + b\mathbf{w} + c(\mathbf{w} + \mathbf{v} + 2\mathbf{u}) = \mathbf{O}.$$

La riscriviamo come

$$(a + 2c)\mathbf{u} + (-a + c)\mathbf{v} + (b + c)\mathbf{w} = \mathbf{O}.$$

Poiché $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono vettori linearmente indipendenti, ne segue che

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ -a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Conclusione: anche $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{w} + \mathbf{v} + 2\mathbf{u}$ sono linearmente indipendenti.

3. Sia data l'applicazione lineare $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $X \mapsto MX$, dove $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
 (a) Determinare nucleo e immagine di F , esibendone una base. Che dimensione hanno?
 (b) Determinare per quali $b \in \mathbf{R}^3$ il sistema lineare $MX = b$ ammette soluzioni.

Sol.: (a) L'immagine di F è generata dai vettori colonna della matrice M , che coincidono rispettivamente con $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ed $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$: la seconda colonna è somma della prima e della terza. Dunque l'immagine ha dimensione 2 ed è data da

$$F(\mathbf{R}^3) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

L'immagine coincide col piano $x_3 = 0$ in $\mathbf{R}^3$.

Il nucleo di F è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $MX = O$ ed ha dimensione

$$\dim \mathbf{R}^3 - \dim F(\mathbf{R}^3) = 3 - 2 = 1.$$

Precisamente

$$\ker F = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(b) Il sistema lineare $MX = b$ ha soluzioni se e solo se $b \in F(\mathbf{R}^3)$, ossia se e solo se b appartiene al piano $x_3 = 0$. Questo equivale a richiedere $\text{rango}(M) = \text{rango}(M|b)$.

4. Sia $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

Sol.: (a) La matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è data da

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è data da

$$\widetilde{M} = C_{\mathcal{B}, \text{Can}} M C_{\text{Can}, \mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}, \text{Can}} M C_{\mathcal{B}, \text{Can}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $C_{\mathcal{B}, \text{Can}}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica:

$$C_{\mathcal{B}, \text{Can}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}, \text{Can}}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Calcolare l'area del triangolo PQR dove P, Q, R sono i punti in $\mathbf{R}^2$ dati da

$$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Sol.: L'area del triangolo cercato è uguale all'area di ogni suo traslato, dato che le traslazioni sono isometrie.

Per cui possiamo considerare l'immagine del triangolo tramite una traslazione di passo $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ che ha vertici

$$P' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad R' = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

L'area del triangolo PQR è uguale all'area del triangolo $P'Q'R'$ ed è data da

$$\frac{1}{2} |\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}| = \frac{1}{2}.$$

6. Sia data la forma quadratica $Q(X) = {}^t X A X$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una matrice ortogonale M che diagonalizza A .

(b) Sia $X = MY$ il corrispondente cambiamento di coordinate in $\mathbf{R}^3$. Fare un disegno approssimativo della superficie $Q(Y) = 1$ (tagliarla con piani orizzontali).

Sol.: (a) Il polinomio caratteristico di A è dato da $-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$, che ha radici $\lambda = -1$, con molteplicità 2, e $\lambda = 2$, con molteplicità 1. I rispettivi autospazi sono

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \quad V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$, formata da autovettori di A , è data ad esempio dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Nelle coordinate indotte da questa base, la forma quadratica diventa

$$Q(Y) = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2.$$

(b) In queste coordinate, la superficie $Q(Y) = 1$

$$y_3^2 = 1 + y_1^2 + y_2^2$$

è un iperboloide ad una falda.