

COGNOME ..... NOME .....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Ogni esercizio vale 5 punti. Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

1. Sia  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  e sia  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare data da  $f(X) = AX$ , per  $X \in \mathbf{R}^3$ . Determinare l'insieme dei vettori  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$  per cui il sistema  $AX = \mathbf{b}$  ammette soluzioni.

*Sol.*: Il sistema ammette soluzioni se e solo se il vettore dei termini noti  $\mathbf{b}$  appartiene all'immagine di  $f$ , ossia al sottospazio  $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ . Si tratta del piano di equazione  $y + 2z = 0$  in  $\mathbf{R}^3$ .

2. Sia  $\mathbf{R}_2[x] = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a due e sia  $U = \{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$ .
- (a) Mostrare che  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}_2[x]$  e determinare la sua dimensione.
- (b) Determinare un sottospazio complementare ad  $U$  in  $\mathbf{R}_2[x]$ .

*Sol.*: Sia  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a, b, c \in \mathbf{R}$  il generico elemento di  $\mathbf{R}_2[x]$ . Abbiamo che  $p \in U$  se e solo se  $p(1) = a + b + c = 0$ .

(a) L'insieme  $U$  è dato dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di una equazione, ossia  $a + b + c = 0$ , in tre incognite. Dunque è un sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}_2[x]$ , di dimensione 2.

(b) Un sottospazio complementare ad  $U$  in  $\mathbf{R}_2[x]$  è ad esempio il sottospazio di dimensione 1, generato dal polinomio  $q(x) = x^2$  (basta prendere un polinomio che non appartenga ad  $U$ ).

3. Sia  $P$  il punto e sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbf{R}^4$  dati da

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad U = \{X \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}\}.$$

Calcolare la distanza  $d(P, U)$ .

*Sol.*: Il punto  $P$  non appartiene al sottospazio  $U$ , per cui la distanza  $d(P, U)$  è strettamente positiva. La distanza cercata coincide con la distanza di  $P$  dalla sua proiezione ortogonale su  $U$

$$d(P, U) = d(P, \pi_U(P)).$$

Per calcolare  $\pi_U(P)$ , determiniamo una base ortonormale di  $U$ , i.e.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

da cui

$$\pi_U(P) = (P \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$d(P, \pi_U(P)) = \|P - \pi_U(P)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1/\sqrt{2}.$$

4. Sia  $Q$  una quadrica in  $\mathbf{R}^3$  della forma  $X^2 + aX + bY + cZ = 0$ . Esibire, se esistono, coefficienti  $a, b, c \in \mathbf{R}$  in modo che l'equazione di  $Q$  definisca

- (a) un cilindro ellittico;
- (b) una retta;
- (c) due piani incidenti.

*Sol.*: (a) Non esistono  $a, b, c \in \mathbf{R}$  per cui  $Q$  è un cilindro ellittico: in quel caso l'equazione dovrebbe avere due termini di secondo grado.

(a)(b)(c) In generale, non esistono  $a, b, c \in \mathbf{R}$  per cui  $Q$  definisca un cilindro ellittico, una retta o due piani incidenti: mediante una traslazione  $\begin{cases} X = x + \alpha \\ Y = y + \beta \\ z = Z + \gamma \end{cases}$  l'equazione può essere portata nella forma

$$x^2 + by + cz = 0.$$

Tale equazione definisce due piani coincidenti per  $b = c = 0$ , un cilindro parabolico se  $b \neq 0$  oppure  $c \neq 0$ .

5. Sia  $M$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix}$  e sia  $h : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$  l'applicazione lineare data da  $h(\mathbf{v}) = M\mathbf{v}$ , per  $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2$ .

(a) Dimostrare che  $h$  è una biiezione.

(b) Esibire  $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2$  tale che  $h(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ .

(portare i numeri complessi nella forma  $a + ib$ , con  $a, b \in \mathbf{R}$ ).

*Sol.*: (a) L'applicazione  $h$  è una biiezione perché  $\det \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} = 2-i \neq 0$ .

(b) Dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+i)z_1 + z_2 = 1 \\ iz_1 + (1-i)z_2 = i. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo  $z_2 = 1 - (i+i)z_1$  che sostituita nella seconda dà

$$z_1 = (1-2i)/(2-i) = (4-3i)/5,$$

per cui l'unica soluzione del sistema è data da

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (4-3i)/5 \\ -(2+i)/5 \end{pmatrix}.$$

6. Siano dati i vettori  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Sia  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione

lineare che ha autovettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  con autovalori rispettivamente  $\lambda = 1$ ,  $\mu = -1$  e  $\rho = 0$ .

(a) Verificare che  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  formano una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^3$

(b) Determinare la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , in dominio e codominio.

(c) Determinare la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base canonica, in dominio e codominio.

*Sol.*: (a) I vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  formano una base di  $\mathbf{R}^3$ : basta verificare che il determinante della matrice che li ha per colonne ha determinate 1, diverso da zero.

(b) La matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  (formata da autovettori, di autovalori rispettivamente  $\lambda = 1$ ,  $\mu = -1$  e  $\rho = 0$ ), in dominio e codominio, è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Dal diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{M=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \downarrow C_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} & & \uparrow C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\tilde{M}} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base canonica, in dominio e codominio è data da

$$M = C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \tilde{M} C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove  $C_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base  $\mathcal{B}$ .