GEOMETRIA (Geatti-Schoof) Appello 5 Roma, 8 luglio 2022, ore 10-12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Ogni esercizio vale 5 punti. Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

---

1. *Determinare le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} ix + y = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

(Portare i numeri complessi nella forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbf{R}$).

Sol.: Dalla prima equazione ricaviamo $x = -\frac{1}{i-1} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, che sostituito nella seconda equazione dà $y = 2 - x = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$. Conclusione: il sistema ha un'unica soluzione data dal vettore

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

2. *Siano dati i sottospazi di* $\mathbf{R}^4$

$$U = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad V : \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Calcolare $\dim U + V$ *e* $\dim U \cap V$*.*

Sol.: Il generico elemento $u = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ -a+b \\ a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$, di U appartiene a V se e solo se soddisfa le equazioni di V, ossia

$$\begin{cases} (a+b) + (-a+b) + a = a + 2b = 0 \\ b + (-a+b) + 2a = a + 2b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 3b \\ -2b \end{pmatrix},\ b \in \mathbf{R}.$$

Dunque $U \cap V = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ ed ha dimensione 1. Per la formula di Grassmann, $\dim U + V = \dim U + \dim V - \dim U \cap V = 2 + 2 - 1 = 3.$

3. *Sia r la retta di equazione $x + y = 0$ in $\mathbf{R}^2$. Determinare l'equazione dell'immagine di r tramite la rotazione di 60^0 intorno al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Sol.: Le formule della rotazione di 60^o intorno al punto $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sono date da

$$F(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = T_{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \circ R_{\pi/3} \circ T_{-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

Siano $P = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ due punti su r. La retta cercata è la retta per

$$F(P) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad F(Q) = \begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$$

ed ha equazione

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})x_1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})x_2 = -1.$$

4. *Siano* $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ *vettori linearmente indipendenti in* $\mathbf{R}^3$. *Sia* $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *data da*

$$f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = \det\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & x_1\\ a_2 & b_2 & x_2\\ a_3 & b_3 & x_3\end{pmatrix}.$$

   (a) *Verificare che f è lineare;*
   (b) *Determinare una base del nucleo;*
   (c) *Verificare che f è suriettiva.*

Sol.: (a) La linearità di f segue dalla multilinearità del determinante.

(b) Poiché $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) \neq 0$ se e solo se i vettori

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, un vettore appartiene al nucleo di f se e solo se appartiene a $\text{span}\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\}$. In particolare $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, che sono linearmente indipendenti, sono una base del nucleo di f.

(c) Poiché $\dim\ker(f) = 2$, la dimensione dell'immagine di f è 1 ed è uguale alla dimensione del codominio. In particolare f è suriettiva.

5. *Sia S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-2x+2z = 3$ in $\mathbf{R}^3$. Sia π il piano di equazione $x+y+z = 3$. Determinare il raggio della circonferenza $S \cap \pi$.*

Sol.: La sfera S ha centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e raggio $R = \sqrt{5}$. La retta

$$s : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R},$$

passante per C e perpendicolare a π, interseca π nel punto

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la distanza $d(c, C) = \sqrt{3} < \sqrt{5}$, per cui il punto c è all'interno della sfera e coincide col centro della circonferenza $S \cap \pi \neq \emptyset$. Il raggio r di tale circonferenza si trova col teorema di Pitagora

$$r = \sqrt{R^2 - d(c,C)^2} = \sqrt{5-3} = \sqrt{2}.$$

6. *Sia $n > 1$ e sia $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la mappa lineare data da*

$$f(\mathbf{e}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbf{e}_j, \qquad \textit{per } 1 \leq i \leq n.$$

Calcolare il determinante di f.

Sol.: La matrice rappresentativa di f è la matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = -1$ il rango della matrice $A - \lambda\,\mathrm{I_n}$ è uguale a 1. Questo implica che la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = -1$ è uguale a $n-1$. La molteplicità algebrica è quindi almeno $n-1$. Poiché la traccia di A è zero, l'autovalore mancante è $0-(n-1)(-1) = n-1$ e la molteplicità algebrica di $\lambda = -1$ è esattamente $n-1$. Il determinante è uguale al prodotto degli autovalori elevati a loro molteplicità algebrica ed è quindi uguale a $(-1)^{n-1}(n-1)$.