GEOMETRIA (Geatti-Schoof) Appello 4 Roma, 1 giugno 2022, ore 10-12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Ogni esercizio vale 5 punti. Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

1. *Determinare la distanza fra le rette di* $\mathbf{R}^3$

$$r: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=1 \end{cases} \quad ed \quad s: \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=0 \end{cases}.$$

Sol.: Le due rette sono date rispettivamente da

$$r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbf{R}, \qquad s: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbf{R},$$

e sono parallele. Il piano π di equazione $x+y+2z=0$ è ortogonale ad entrambe e le taglia nei punti

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \in r \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \in s.$$

La distanza cercata è

$$d(r,s) = d(P,Q) = \sqrt{5/6}.$$

2. *Sia* $V \subset \mathbf{R}^3$ *il sottospazio di equazione* $x+y+2z=0$. *Sia* $f: V \longrightarrow V$ *la mappa lineare data da* $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \\ z \end{pmatrix}$, *dove* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *in* V. *Determinare il polinomio caratteristico di* f.

Sol.: Osserviamo che $X \in V$ implica $f(X) \in V$: infatti $(x+z)+(y-z)+2z = x+y+2z = 0$. Scegliamo ad esempio la base di V data da $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1, \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

per cui la matrice rappresentativa di f nella base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ in dominio e codominio è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio carateristico è $p_\lambda(M) = (1-\lambda)^2$.

3. *Sia* $L\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare data da* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) *Determinare autovalori e autospazi di* L*;*
   (b) *Determinare se* L *è o meno diagonalizzabile.*

Sol.: La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha tre autovalori uguali a 1. L'autospazio corrispondente è $V_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, di dimensione 2. Non ci sono tre autovalori di A linearmente indipendenti, per cui L non è diagonalizzabile.

4. *Sia* V *uno spazio vettoriale reale di dimensione* n *dotato di prodotto scalare* $\langle\,,\,\rangle$ *e sia* $\mathbf{v}_0 \in V$ *un vettore di norma* $\|\mathbf{v}_0\| = 1$*. Sia* $f\colon V \to V$ *l'applicazione lineare definita da* $f(X) = X - \langle X, \mathbf{v}_0\rangle \mathbf{v}_0$*. Determinare le dimensioni del nucleo e del immagine di* f*.*

Sol.: Dato $X \in V$, il vettore $\langle X, \mathbf{v}_0\rangle \mathbf{v}_0$ è la sua proiezione ortogonale lungo la retta determinata da $\mathbf{v}_0$. Inoltre X si decompone come la somma di due componenti ortogonali

$$X = (X - \langle X, \mathbf{v}_0\rangle \mathbf{v}_0) + \langle X, \mathbf{v}_0\rangle \mathbf{v}_0.$$

L'applicazione f associa ad X la componente $X - \langle X, \mathbf{v}_0\rangle \mathbf{v}_0$ ortogonale a $\mathbf{v}_0$, per cui

$$\ker(f) = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_0\}, \qquad Im(f) = \mathbf{v}_0^\perp.$$

Conclusione: $\dim\ker(f) = 1$ e $\dim Im(F) = n-1$.

5. *Determinare un vettore* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ *in modo che la matrice* $\begin{pmatrix} a & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ b & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ c & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$ *sia una matrice ortogonale.*

Sol.: Cerchiamo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ortogonale ai due vettori colonna della matrice e di norma 1, ossia tale che

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - b = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

Il vettore cercato è $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} 1/\sqrt{3}$.

6. *Sia Q una quadrica in $\mathbf{R}^3$ della forma $X^2 + aX + bY + cZ + d = 0$. Esibire coefficienti $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, se esistono, in modo che l'equazione di Q definisca*
   (a) *un cilindro parabolico;*
   (b) *una retta;*
   (c) *due piani paralleli.*

Sol.: Per $a = c = d = 0$ e $b = 1$, l'equazione diventa $X^2 + Y = 0$ e rappresenta un cilindro parabolico; per $a = b = c = 0$ e $d = -1$, l'equazione diventa $X^2 = 1$ e rappresenta due piani paralleli. Non è possibile definire una retta con una sola equazione in $\mathbf{R}^3$.