GEOMETRIA (Geatti-Schoof) Appello 3 Roma, 25 febbraio 2022, ore 10-12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Ogni esercizio vale 5 punti. Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

---

1. *Siano* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale* V. *Sia* $U = \mathrm{span}\{\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z},\ -\mathbf{y}+\mathbf{z}-\mathbf{u},\ \mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{v},\ \mathbf{x}+\mathbf{v}\}$. *Determinare la dimensione di* U.

Sol.: La dimensione di U è al massimo 5, ed è uguale a 5 se e solo se i generatori di U sono linearmente indipendenti, ossia

$$a(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z})+b(-\mathbf{y}+\mathbf{z}-\mathbf{u})+c(\mathbf{u}+\mathbf{v})+d(\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{v})+e(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow a=b=c=d=e=0.$$

Riscrivendo il termine di sinistra, troviamo

$$\mathbf{x}(a+e)+\mathbf{y}(a-b+d)+\mathbf{z}(-a+b+d)+\mathbf{u}(-b+c)+\mathbf{v}(c+d+e) = \mathbf{0}$$

che, per la lineare indipendenza di $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, implica

$$\begin{cases} a+e=0 \\ a-b+d=0 \\ -a+b+d=0 \\ -b+c=0 \\ c+d+e=0 \end{cases}$$

Questo sistema ha infinite soluzioni, quindi $\dim U < 5$. Questo si poteva anche dedurre osservando che

$$\mathbf{x}+\mathbf{v} = (\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z}) + (-\mathbf{y}+\mathbf{z}-\mathbf{u}) + (\mathbf{u}+\mathbf{v}).$$

Similmente si verifica che i primi 4 generatori di U sono linearmente indipendenti, per cui $\dim U = 4$.

2. *Sia* $S \subset \mathbf{R}^3$ *la sfera di equazione* $x^2+y^2+z^2=1$ *e sia* r *la retta in* $\mathbf{R}^3$ *di equazione parametrica*

$$r: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}.$$

(a) *Dimostrare che* $r \cap S = \emptyset$.
(b) *Determinare il punto di* S *che sta più vicino alla retta* r.

Sol.: (a) I punti della retta r sono dati da $\begin{pmatrix} 2+t \\ 2 \\ 1-2t \end{pmatrix}$, al variare di $t \in \mathbf{R}$. Sostituendo le coordinate nell'equazione della sfera troviamo l'equazione in t

$$(2+t)^2 + 4 + (1-2t)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5t^2+8=0,$$

che non ha soluzioni reali. Quindi $r \cap S = \emptyset$.

(b) Per trovare il punto di S più vicino ad r, determiniamo la retta l per l'origine (centro della sfera) che interseca r ortogonalmente. La retta l a sua volta interseca la sfera in due punti: uno dei due è il punto cercato.

Costruzione di l:
il piano per l'origine ortogonale ad r ha equazione

$$\pi : \quad x - 2z = 0,$$

ed interseca la retta r nel punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Questo è il punto di r più vicino ad S. La retta l è la retta per l'origine e per Q

$$l : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbf{R}.$$

Calcolando $l \cap S$ troviamo

$$4\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \pm 1/3,$$

valori che corrispondono rispettivamente ai punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Confrontando le distanze dal punto $Q \in r$ da P_1 e P_2, troviamo

$$d(P_1, Q)^2 = 36/9 \qquad d(P_2, Q)^2 = 64/9 + 64/9 + 16/9,$$

per cui il punto cercato è P_1.

3. *Sia* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{i}{3} \\ \frac{2i}{3} \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{C}^2$.
   (a) *Determinare la lunghezza di* $\mathbf{v}$.
   (b) *Se esiste, scrivere una matrice unitaria* 2×2 *con prima colonna uguale a* $\mathbf{v}$.

Sol.: Abbiamo $\|\mathbf{v}\|^2 = 4/9 + 1/9 + 4/9 = 1$. Quindi è possibile scrivere una matrice unitaria 2×2 con prima colonna uguale a $\mathbf{v}$: basta trovare un vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ tale che

$$\|\mathbf{w}\|^2 = 1, \qquad (\frac{2}{3} + \frac{i}{3})\overline{w}_1 + \frac{2i}{3}\overline{w}_2 = 0.$$

Ad esempio

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2i/3 \\ 2/3 - i/3 \end{pmatrix}.$$

4. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un'applicazione lineare con la proprietà che $f^2 = f$, ossia tale che $f(f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v})$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Supponiamo anche che f sia diversa dall'identità e dall'applicazione identicamente nulla.*
   (a) *Per gli autovalori di f ci sono solo due possibilità. Quali?*
   (b) *Esibire due esempi espliciti di applicazioni f con tracce diverse.*

Sol.: (a) Sia λ un autovalore di f. Allora esiste un vettore non nullo $\mathbf{v}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Dalla condizione $f^2 = f$, si ottiene $f(f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v} = f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, da cui

$$\lambda^2 = \lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 0 \text{ oppure } \lambda = 1.$$

(b) Due esempi espliciti:

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

la proiezione ortogonale sull'asse x_1;

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \qquad g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

la proiezione ortogonale sul piano x_1, x_2.

5. *Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di f.*

Sol.: La matrice A che rappresenta f nella base canonica (ortonormale per il prodotto scalare canonico) è una matrice simmetrica, quindi autospazi di autovalori distinti sono ortogonali. In particolare esiste sempre una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ fatta di autovettori di f. La matrice A ha rango 1, quindi $\ker(f)$, che coincide con l'autospazio di 0, ha dimensione 3 ed è dato da

$$V_0 = \{x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Nel primo caso, la la base e' già ortogonale, quindi basta normalizzarla

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Nel secondo caso, usando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Smidt, troviamo prima una base ortogonale

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\\-1\end{pmatrix},$$

e poi una base ortonormale

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \sqrt{2/3}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \sqrt{3}/2\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\\-1\end{pmatrix}.$$

L'altro autovalore di f è $\lambda = 4$ e il relativo autospazio è

$$V_4 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\}, \qquad V_4 \perp V_0.$$

In conclusione una base O.N. di $\mathbf{R}^4$ fatta di autovettori di f è ad esempio

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

6. *Disegnare la conica $\mathcal{C}$ in $\mathbf{R}^2$ di equazione* $x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 4y = 0$.

Sol.: Sia $\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & -2\end{pmatrix}$ la matrice della forma quadratica associata. Questa matrice ha autovalori $\lambda = -3$ e $\lambda = 2$, con autospazi dati rispettivamente da

$$V_{-3} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}, \qquad V_2 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\}.$$

Mediante il cambiamento di coordinate isometrico

$$\begin{cases} x = -2/\sqrt{5}X + 1/\sqrt{5}Y \\ y = 1/\sqrt{5}X + 2/\sqrt{5}Y \end{cases} \tag{$*$}$$

l'equazione diventa

$$2X^2 - 3Y^2 - 8/\sqrt{5}X - 6/\sqrt{5}Y = 0. \tag{$*$}$$

La conica è di tipo iperbolico. Adesso cerchiamo una traslazione

$$\begin{cases} X = \bar{X} + a \\ Y = \bar{Y} + b \end{cases} \tag{$**$}$$

in modo che nelle coordinate $\overline{X}, \overline{Y}$ l'equazione non contenga termini di primo grado. Sostituendo (**) nell'equazione (*), otteniamo

$$2(\bar{X} + a)^2 - 3(\bar{Y} + b)^2 - 8/\sqrt{5}(\bar{X} + a) - 6/\sqrt{5}(\bar{Y} + b)$$

$$= 2\bar{X}^2 - 3\bar{Y}^2 + \bar{X}(4a - 8/\sqrt{5}) - \bar{Y}(6b + 6/\sqrt{5}) + (2a^2 - 3b^2 - 8a/\sqrt{5} - 6b/\sqrt{5}) = 0.$$

Per $a = 2/\sqrt{5}$ e $b = -1/\sqrt{5}$, l'equazione diventa

$$2\bar{X}^2 - 3\bar{Y}^2 = 1.$$