COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Ogni esercizio vale 5 punti.
Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

---

1. *Siano dati il piano π di equazione $x - 2y + z = 2$ e il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$.*

   Determinare due rette ortogonali r ed s passanti per P e parallele a π.

Sol.: Il vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è normale al piano π. Per essere parallele a π le rette r ed s dovranno avere vettore della direzione perpendicolare ad $\mathbf{n}$: ad esempio $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \mathbf{n} \times A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Una possibile coppia di rette con le proprietà richieste (ce ne sono infinite...) è data da

$$r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}, \qquad s: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \tau \in \mathbf{R}.$$

2. *Siano dati $U = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}\}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^4$.*
   (a) *Determinare la dimensione $\dim(U + V)$.*
   (b) *Calcolare la proiezione ortogonale di P su V.*

Sol.: (a) Risolvendo il sistema che definisce V, si trova $V = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Il sottospazio $U + V$ è generato dall'unione dei generatori di U e di V. In questo caso si trova che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono una quaterna linearmente indipendente, da cui segue che $\dim(U + V) = 4$. In particolare $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.
(b) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è una base ortogonale di V, allora la proiezione ortogonale di P su V è data da

$$\pi_V(P) = \frac{P \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{P \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2.$$

Nel nostro caso, i generatori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di V sono ortogonali e vale $P \cdot \mathbf{v}_1 = 0$. Ne segue che

$$\pi_V(P) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Sia* $F\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare data da*

$$X \mapsto AX, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di* F*;*
(b) *Determinare per quali* $b \in \mathbf{R}^3$ *il sistema lineare* $AX = b$ *ammette soluzioni.*

Sol.: (a) L'immagine di F è *generata* dai vettori colonna non nulli di A, ossia

$$Im(F) = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

È facile verificare che questi vettori sono linearmente indipendenti. Quindi formano una base di $Im(F)$, che risulta di dimensione 3 e coincide con $\mathbf{R}^3$. Il nucleo di F è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$AX = 0, \text{ con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0, \end{cases}$$

ossia

$$\ker(F) = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \qquad \dim \ker(F) = 1.$$

(b) Il sistema lineare $AX = b$ ammette soluzioni se e solo se b appartiene all'immagine di F. In questo caso F è suriettiva, per cui il sistema ammette soluzioni per ogni $b \in \mathbf{R}^3$.

4. *Sia* $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$ *e sia* $f : V \to V$ *data da* $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$.
(a) *Esibire una base di* V*;*
(b) *Determinare la matrice rappresentativa di* f *rispetto a questa base (in dominio e codominio);*
(c) *Calcolarne il polinomio caratteristico.*

Sol.: Verifichiamo innanzitutto che $f(V) \subset V$. Se un vettore ha coordinate con somma uguale a zero, anche la sua immagine ha coordinate con somma uguale a zero

$$(x + y) + (y + z) + (z + x) = 2(x + y + z) = 0.$$

(a) Una base di V è data ad esempio dai vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Le immagini di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ tramite f sono rispettivamente

$$f(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \qquad f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1.$$

Ne segue che la matrice rappresentativa di f rispetto a questa (in dominio e codominio) è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Il polinomio caratteristico di M (e di tutte le matrici rappresentative di f) è dato da $p_\lambda(M) = \lambda^2 - \lambda + 1$.

5. *Sia* $g : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ *l'applicazione data da*

$$g\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base di $\mathbf{C}^2$ *di autovettori di* g *(portare i numeri complessi nella forma* $a + ib$*, con* $a, b \in \mathbf{R}$*).*

Sol.: Il polinomio caratteristico di g è dato da $p_\lambda(g) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ ed ha radici $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$. L'autospazio V_{1+i} è dato dalle soluzioni dell'equazione $-ix + y = 0$, dunque $V_{1+i} = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\}$. L'autospazio V_{1-i} è dato dalle soluzioni dell'equazione $ix + y = 0$, dunque $V_{1-i} = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$.

6. *Sia* C *la circonferenza in* $\mathbf{R}^2$ *di equazione* $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ *e sia* $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Determinare le equazioni cartesiane delle due rette passanti per il punto* P *e tangenti a* C.

Sol.: La circonferenza C ha centro $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e raggio $r = \sqrt{2}$. I punti di tangenza Q ed R delle due rette passanti per il punto P e tangenti a C si ottengono come intersezione di C con la circonferenza di centro P e raggio R, dove $R^2 = d(c, P)^2 - r^2 = 10 - 2 = 8$. Calcoliamo l'intersezione delle due circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; R = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}.$$

Le due rette tangenti a C in Q ed R sono date rispettivamente da

$$X = P + t(Q - P), \; t \in \mathbf{R} \qquad X = P + s(R - P), \; s \in \mathbf{R}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbf{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2/5 \\ -14/5 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbf{R}.$$

Equazioni cartesiane delle rette:

$$x + y = 2, \qquad 7x - y = -2.$$