COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Ogni esercizio vale 5 punti.
Consegnare SOLO LA BELLA COPIA.

1. *Risolvere il seguente sistema lineare (portare i numeri complessi nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbf{R}$)*

$$\begin{cases} ix + (2+i)y = 1 - i \\ -x + iy = 0. \end{cases}$$

Sol.: Dalla seconda equazione ricaviamo $x = iy$, che sostituito nella prima dà $y = \frac{1-i}{1+i} = -i$. Quindi l'unica soluzione del sistema è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

2. *Determinare la distanza fra le rette r ed s date da*

$$r: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}, \qquad s: \quad \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}.$$

Sol.: La retta r è parallela al vettore $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la retta s è parallela al vettore $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (il vettore B si ottiene ad esempio dal prodotto vettoriale dei vettori normali ai piani che si intersecano in s). Si verifica facilmente che r ed s sono sghembe: non sono parallele ed hanno intersezione vuota. In particolare r ed s sono contenute su piani paralleli, con vettore normale $A \times B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dati rispettivamente da

$$\pi_1: \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \qquad \pi_2: \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 1.$$

Sia

$$l: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbf{R},$$

la retta passante per $P \in r$ e perpendicolare ai piani π_1 e π_2. La retta l interseca π_2 nel punto $Q = l \cap \pi_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$. La distanza cercata è

$$d(r, s) = d(P, Q) = \sqrt{6}/3.$$

3. *Dati i sottospazi di $\mathbf{R}^4$*

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \}, \qquad V = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \},$$

determinare la dimensione di $U + V$ e di $U \cap V$.

Sol.: Abbiamo $\dim U = 2$ e $\dim V = 2$: i generatori di V sono linearmente indipendenti, il sottospazio U è dato dalle soluzioni del sistema lineare equivalente a scala $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ (la terza equazione è somma delle prime due). L'intersezione dei due sottospazi è data da

$$U \cap V = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \dim U \cap V = 1.$$

Per le formule di Grassmann vale

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 3.$$

4. *Siano dati i vettori* $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^3$.
   (a) Mostrare che $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *formano una base di* $\mathbf{R}^3$.
   Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare per cui* $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f *nella base* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *(in dominio e codominio).*
   (c) Determinare la matrice rappresentativa di f *nella base canonica (in dominio e codominio).*

Sol.: (a) I vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti: ad esempio basta verificare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(b) La matrice rappresentativa di f nella base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ (in dominio e codominio) ha per colonne le coordinate dei vettori $f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$ ed $f(\mathbf{v}_3)$ nella base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Dunque è data da

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice rappresentativa di f nella base canonica (in dominio e codominio) è data da

$$\widetilde{M} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} M C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1},$$

dove $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$, secondo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{\widetilde{M}} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \big\downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} & & \big\uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{M} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

La matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica è data da $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ è $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dunque la matrice cercata è

$$\widetilde{M} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, *determinare una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di* A.

Sol.: Innanzitutto, una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A esiste perché A è simmetrica. Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P_\lambda(A) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5.$$

Le radici di P sono $\lambda = -1$, con molteplicità 2, e $\lambda = 5$, con con molteplicità 1. Gli autospazi corrispondenti sono dati da

$$V_{-1} = \{x + 2y - z = 0\} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad V_5 = V_{-1}^{\perp} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

Siccome la matrice A è simmetrica, autospazi di autovalori distinti sono a due a due ortogonali! Usando il procedimento di ortogonalizzazione di G.-S. sui vettori di V_{-1} , troviamo che una base O.N. di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A è data da

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. *Data la quadrica* $x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xz - 4yz - 2xy = 1$. *Dire di che tipo di quadrica si tratta.*

Sol.: La matrice simmetrica associata della forma quadratica della quadrica è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P_\lambda(A) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(-\lambda + 6).$$

Le radici di P sono $\lambda = 0$, con molteplicità 2, e $\lambda = 6$, con con molteplicità 1. Dopo un cambiamento di coordinate dato da un'isometria lineare,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

l'equazione della quadrica diventa

$$X^2 - 1 = (X+1)(X-1) = 0.$$

Quindi è data dall'unione dei piani paralleli $X + 1 = 0$ e $X - 1 = 0$.